

فصل پنجم

مدارهای الکتریکی مرتبه اول

۱-۵ - مقدمه

در فصل‌های قبل، عناصر مقاومت، سلف و خازن را تشریح نموده و مدارهای مقاومتی ساده را بر اساس روش‌های مختلف حل مدارهای الکتریکی تحلیل نمودیم. در این فصل برآئیم تا تنوع در عناصر مدار را گسترش داده و مدارهای مقاومتی سلفی (RL) و مدارهای مقاومتی خازنی (RC) را مورد بررسی و ارزیابی قرار دهیم. در حل این نوع مدارها به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بروخورد می‌کنیم و بهمین خاطر به این نوع مدارها، مدارهای مرتبه اول^۱ نیز می‌گویند. همچنین عناصر مورد بررسی در این فصل، عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان هستند. بهمنظور درک بهتر از روند حل این نوع مدارها، ابتدا مفاهیم پاسخ ورودی صفر^۲ و پاسخ حالت صفر^۳ مدارهای RL و RC را در بخش‌های مجزا مطرح نموده و در نهایت، مفهوم پاسخ کامل این نوع مدارها را با جمع این دو پاسخ در مدارها بیان خواهیم کرد. در فصل بعدی، مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان RLC مطرح خواهند شد که در این نوع مدارها، نیاز به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم می‌باشد. بهمین علت به این نوع مدارها، مدارهای الکتریکی مرتبه دوم می‌گویند.

¹- First Order Circuits

²- Zero Input Response

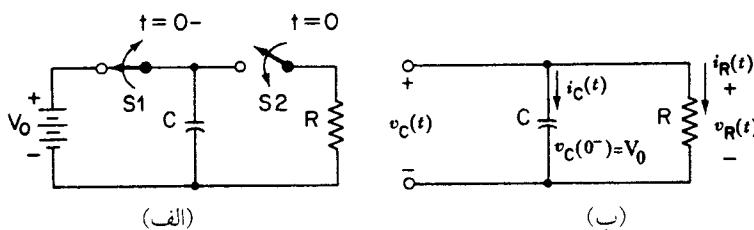
³- Zero State Response

۲-۵- پاسخ ورودی صفر

در فصل چهارم بیان نمودیم که عناصر خازن و سلف بترتیب قادرند تا یک ولتاژ اولیه ($v_C(0)$) و یک جریان اولیه ($i_L(0)$) را داشته باشند. بنابراین در مدارهای الکتریکی RL یا RC که به یک منبع الکتریکی متصل باشند، جریان سلفها و ولتاژ خازنها با زمان، در حال تغییر هستند. در این بخش، هدف آن است که مدارهای الکتریکی موردنظر را بدون هیچ‌گونه منع الکتریکی ورودی (یا ورودی صفر) و فقط با وجود شرایط اولیه برای عناصر سلف یا خازن (یعنی $v_C(0)$ یا $i_L(0)$) مورد بررسی و تحلیل قرار دهیم. لذا به این‌گونه تحلیل مدار، پاسخ ورودی صفر می‌گویند.

۲-۱- مدار الکتریکی RC

یک مدار RC ساده مطابق با شکل (۱-۵) در نظر بگیرید که خازن مدار بدون هیچ‌گونه ولتاژ اولیه است. در این مدار ابتدا فرض می‌شود که خازن C به مدت طولانی از طریق کلید S_1 به منع ولتاژ dc ثابت (یک باتری) با ولتاژ V_0 متصل باشد. در صورتی که این کلید تا زمان $t < 0$ بسته باشد نتیجه می‌گیریم که خازن C به مقدار V_0 شارژ شده است. حال اگر در زمان $t = 0^-$ (زمان $t = 0^-$ یعنی دقیقاً قبل از زمان $t = 0$ است) کلید S_1 قطع شده و در زمان $t = 0^+$ ، کلید S_2 وصل شود، آنگاه مدار ارائه شده در شکل (۱-۵- ب) ایجاد می‌گردد که خازن C با یک ولتاژ اولیه $v_C(0) = V_0$ خواهد بود. به عبارت دیگر، در زمان $t = 0^+$ ، خازن موردنظر دارای بار ذخیره شده $Q(0) = C \cdot V_0$ خواهد بود که با گذشت زمان، این بار الکتریکی از طریق مقاومت R و با ایجاد جریان $i(t)$ تخلیه می‌شود. در این روند، انرژی اولیه ذخیره شده در خازن، به صورت انرژی تلفاتی در مقاومت (تلفات حرارتی) ظاهر می‌شود.



شکل (۱-۵): مدار RC مرتبه اول؛ (الف): در وضعیت کلیدزنی؛ (ب) پس از کلیدزنی

برای تحلیل مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱-۵- ب)، برای زمان $t \geq 0$ می‌توان از قوانین KCL یا KVL ارائه شده در فصل سوم استفاده نمود. با توجه به آنکه برای عنصر

مقاومت، رابطه $v_R(t) = R.i(t)$ و برای خازن موردنظر، رابطه $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ و $v_C(o) = V_0$ می‌باشد، لذا با استفاده از قوانین KVL و KCL خواهیم داشت:

$$\text{KVL: } v_C(t) = v_R(t) \quad t \geq o \quad (1-5)$$

$$\text{KCL: } i_C(t) + i_R(t) = o \quad t \geq o \quad (2-5)$$

با استفاده از روابط مشخصه سلف و خازن در معادله (۲-۵) می‌توان نوشت:

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_R(t)}{R} = o \quad (3-5)$$

با توجه به تساوی ولتاژ دو سر مقاومت و خازن بر اساس معادله (۱-۵)، رابطه (۳-۵) به شکل زیر اصلاح می‌گردد:

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = o \quad t \geq o, \quad v_C(o) = V_0 \quad (4-5)$$

معادله اخیر، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که بیانگر رفتار مدار خطی ارائه شده در شکل (۱-۵-ب) می‌باشد. جواب کلی معادله دیفرانسیل اخیر به صورت یک تابع نمایی زیر است:

$$v_C(t) = K \cdot e^{-t/RC} \quad (5-5)$$

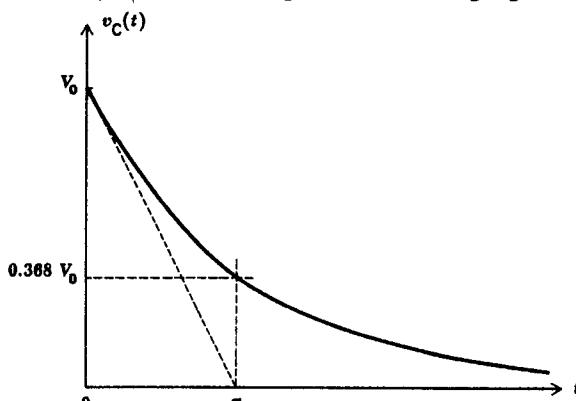
که ضریب K را با شرط اولیه $v_C(o) = V_0$ به صورت زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$K = v_C(o) = V_0$$

در نهایت، جواب نهایی معادله (۴-۵) برابر است با:

$$v_C(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} \quad t \geq o \quad (6-5)$$

نحوه تغییرات ولتاژ دو سر خازن بر اساس رابطه (۶-۵) را می‌توان در شکل (۲-۵) مشاهده نمود که کاهش این ولتاژ با ثابت زمانی $\tau = RC$ انجام می‌گیرد.



شکل (۲-۵): نحوه تغییرات ولتاژ خازن $v_C(t)$

با تعیین ولتاژ $v_C(t)$ ، جریان خازن را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{V_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0 \quad (7-5)$$

همچنین بر اساس روابط (۱-۵) و (۲-۵) می‌توان نوشت:

$$v_R(t) = v_C(t) = V_o e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0 \quad (8-5)$$

$$i_R(t) = -i_C(t) = \frac{V_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0 \quad (9-5)$$

مثال (۱-۵): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱-۵) مدنظر است که در آن $C = 1\mu F$ ، $R = 10 k\Omega$ و $v(o) = V_o = 10 V$ می‌باشد. منحنی تغییرات ولتاژ $v_C(t)$ و جریان $i_C(t)$ را برای $t \geq 0$ بباید.

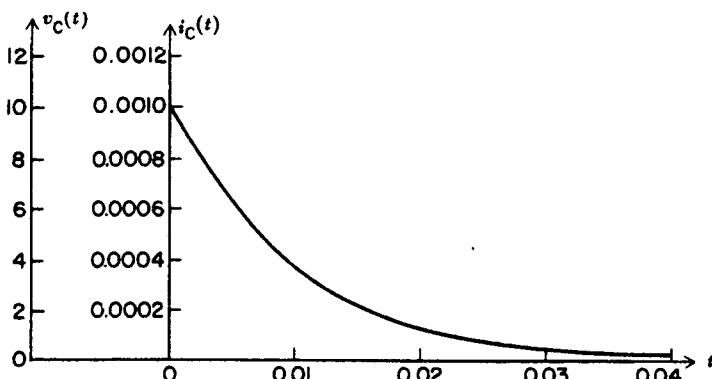
حل: بر اساس معادله (۵-۶) ولتاژ $v_C(t)$ را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$v_C(t) = V_o e^{-\frac{t}{RC}} = 10 e^{-100t} (V)$$

که همچنین جریان $i_C(t)$ نیز بر اساس رابطه (۷-۵) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

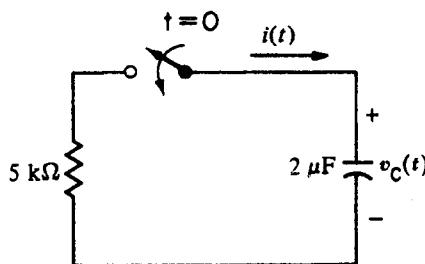
$$i_C(t) = 100 e^{-100t}$$

که منحنی تغییرات ولتاژ و جریان الکتریکی دو سر این خازن در شکل (۳-۳) نشان داده شده است.



شکل (۳-۵): شکل موج‌های مربوط به مثال (۱-۵)

تمرین (۱-۵): در مدار شکل (۴-۵)، قبل از وصل کلید در زمان $t = 0$ ، خازن دارای ولتاژ اولیه $100 V$ می‌باشد. پس از وصل کلید، ولتاژ خازن $v_C(t)$ و $i(t)$ را برای $t \geq 0$ بباید.



شکل (۴-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۱)

$$i(t) = -0.2e^{-10t} \text{ (A)} , v_C(t) = 10e^{-10t} \text{ (V)}$$

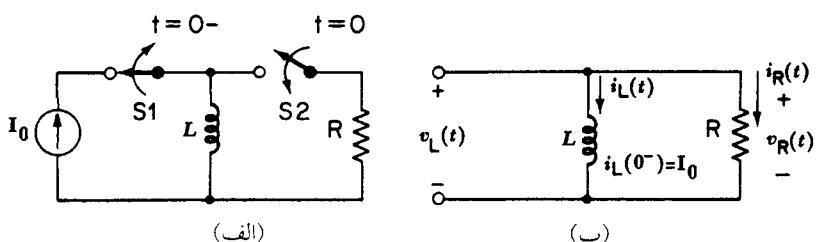
۵-۲-۲- مدار الکتریکی RL

مدارهای الکتریکی مشکل از R و L ، نوع دیگری از مدارهای خطی مرتبه اول می‌باشد. برای این منظور، مدار ارائه شده در شکل (۵-۵) را در نظر بگیرید. فرض کنید که برای زمان $t < 0$ ، کلید S_1 وصل و کلید S_2 قطع می‌باشد. در این حالت، جریان سلف به مقادار جریان ثابت I_0 خواهد رسید. حال در زمان $t = 0$ ، کلید S_1 قطع و کلید S_2 در همان زمان وصل می‌شود. در این حالت، سلف مذکور دارای یک جریان اولیه $i_L(0) = I_0$ خواهد بود که دارای انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی سلف برابر $\frac{1}{2}L.I_0^2$ می‌باشد. پس از زمان $t = 0$ ، این انرژی مغناطیسی از طریق مقاومت R تلف شده و باعث می‌شود که جریان $i_L(t)$ به مرور زمان، کاهش یابد.

مشابه تحلیل مدار RC در بخش قبل، معادلات KVL و KCL در این مدار به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{KVL: } v_L(t) = v_R(t) \quad t \geq 0 \quad (10-5)$$

$$\text{KCL: } i_L(t) + i_R(t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (11-5)$$



شکل (۵-۵): مدار RL مرتبه اول: (الف) در وضعیت کلیدزنی؛ (ب) پس از کلیدزنی

با توجه به آنکه $i_L(o) = I_o$ و $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ ، $v_R(t) = R.i_R(t)$ می‌باشد لذا رابطه (۱۰-۵) را می‌توان به صورت معادله دیفرانسیل زیر بیان نمود:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + R.i_L(t) = 0 \quad t \geq o, \quad I_L(o) = I_o \quad (۱۲-۵)$$

با حل این معادله دیفرانسیل و با در نظر گرفتن جریان اولیه $I_L(o) = I_o$ خواهیم داشت:

$$i_L(t) = I_o \cdot e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \quad t \geq o \quad (۱۳-۵)$$

که در این رابطه، ثابت زمانی جریان $i_L(t)$ به مقدار $\tau = \frac{L}{R}$ می‌باشد.

مثال (۲-۵): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۵-۵-ب) فرض کنید که $R = 4\Omega$ و $L = 2H$ باشد. در این حالت، نحوه تغییرات جریان $i_L(t)$ را بباید.

حل: با استفاده از معادله (۱۲-۵) و بر اساس قانون KVL در مدار مذکور می‌توان نوشت:

$$2 \frac{di_L(t)}{dt} + 4i_L(t) = 0 \quad I_L(o) = 5A$$

که با حل این معادله خواهیم داشت:

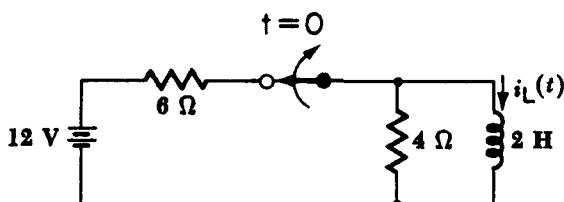
$$i_L(t) = K \cdot e^{-2t} \quad t \geq o$$

با توجه به آنکه در $t = o$ ، $i_L(o) = 5A$ می‌باشد، لذا ضریب K برابر $5A$ خواهد شد. لذا،

$$i_L(t) = 5e^{-2t} \quad t \geq o$$

همچنین ثابت زمانی این مدار برابر $\tau = \frac{L}{R} = \frac{2}{4} = 0.5$ می‌باشد.

تمرین (۲-۵): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۵) فرض می‌شود که کلید مدار به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t = 0$ کلید، باز می‌شود. در این حالت برای زمان $t \geq 0$ ، نحوه تغییرات جریان $i_L(t)$ را بباید.



شکل (۶-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۲-۵)

راهنمایی و جواب: ابتدا جریان اولیه سلف ($i_L(o)$) را بباید که با توجه به اتصال کوتاه

شدن سلف در قبل از قطع کلید $i_L(o) = 2A$ می‌شود. آنگاه

$$i_L(t) = 2e^{-2t}$$

۲-۳-۵- مدارهای جامع تر RL و RC

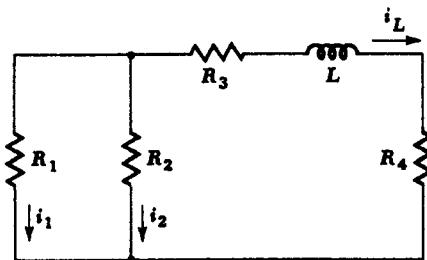
در این بخش برآئیم تا مطالب ارائه شده در دو بخش قبلی برای مدارهای RL و RC ساده را برای مدارهای جامع تری که دارای چند مقاومت سری- موازی است، گسترش دهیم. برای این منظور کافی است که ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر سلف در مدار RL یا از دو سر خازن در مدار RC را محاسبه نموده و سپس از روابط ارائه شده در دو بخش قبلی برای تحلیل مدار مورد نظر استفاده کنیم. به عنوان نمونه، مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۷-۵) را در نظر بگیرید که سلف مدار، دارای جریان اولیه ($i_L(o)$) می‌باشد. برای یافتن ($i_L(t)$) برای زمان‌های $t \geq 0$ ، ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر این سلف را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + R_3 + R_4 \quad (14-5)$$

در نتیجه با توجه به آنکه ثابت زمانی مدار معادل به صورت $\tau = \frac{L}{R_{eq}}$ می‌باشد آنگاه

جریان ($i_L(t)$) برابر خواهد بود با:

$$i_L(t) = i_L(o) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = i_L(o) \cdot e^{-\frac{R_{eq} t}{L}} \quad t \geq 0 \quad (15-5)$$



شکل (۷-۵) یک مدار جامع

همچنین می‌توان با تقسیم جریان ($i_L(t)$) در دو شاخه مقاومت‌های R_1 و R_2 ، جریان‌های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را به دست آورد:

$$i_1(t) = -\frac{R_4}{R_1 + R_4} i_L(o) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (16-5)$$

$$i_2(t) = -\frac{R_1}{R_1 + R_4} i_L(o) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (17-5)$$

از این دو رابطه اخیر، می‌توان جریان اولیه ($i_L(o)$) و ($i_1(o)$ و ($i_2(o)$) را برای دو مقاومت R_1 و R_2 نیز تعیین نمود:

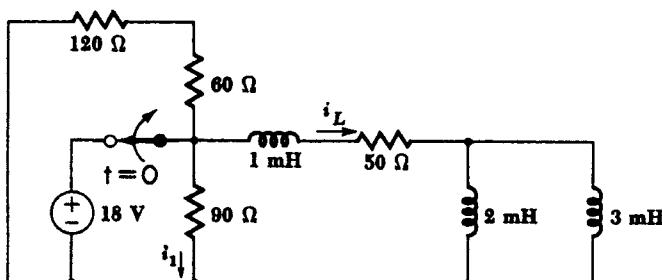
$$i_1(o) = -\frac{R_7}{R_1 + R_7} i_L(o)$$

$$i_7(o) = -\frac{R_1}{R_1 + R_7} i_L(o)$$

در نتیجه ارتباط جریان‌های اولیه $i_1(o)$ و $i_7(o)$ به شکل زیر مشخص می‌شود:

$$i_7(o) = \frac{R_1}{R_7} i_1(o)$$

مثال (۳-۵): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۸-۵) مفروض است که کلید موردنظر به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ باز می‌شود. نحوه تغییرات جریان‌های $i_L(t)$ و $i_1(t)$ را محاسبه نمایید. فرض کنید که $i_L(o) = 0.36A$ برابر باشد.



شکل (۸-۵): مدار جامع RL مربوط به مثال (۳-۵)

حل: در ابتدا برای تعیین جریان اولیه $i_1(o)$ باید جریان اولیه $i_L(o)$ را بین دو مقاومت 90Ω و 180Ω تقسیم جریان نمود. یعنی:

$$i_1(o) = -\frac{180}{180+90} i_L(o)$$

حال با توجه به موازی بودن دو سلف $3mH$ و $2mH$ و سری شدن موازی این دو سلف با سلف $1mH$ خواهیم داشت:

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2+3} + 1 = 2/2mH$$

همچنین مقاومت معادل مدار RL را می‌توان از موازی کردن دو مقاومت 90Ω با 180Ω و سری شدن با مقاومت 50Ω بدست آورد:

$$R_{eq} = \frac{90 \times 180}{90+180} + 50 = 110\Omega$$

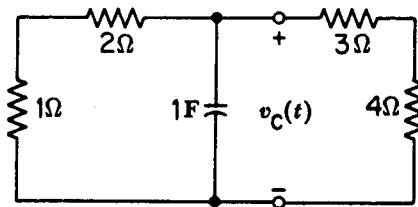
در نهایت جریان $i_L(t)$ بر اساس رابطه (۵-۱۵) برابر خواهد بود با:

$$i_L(t) = 0.36e^{-\left(\frac{11}{2}/2 \times 10^{-3}\right)t} = 0.36e^{-0.05 \times 10^3 t}$$

و،

$$i_1(t) = -0.24e^{-0.05 \times 10^3 t}$$

تمرین (۳-۵): در مدار ارائه شده در شکل (۹-۵)، اگر $v_C(0) = 6V$ باشد آنگاه $v_C(t)$ را برای زمان‌های $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۹-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۳-۵)

$$v_C(t) = -6e^{-\frac{1}{2}t}$$

۳-۵-پاسخ حالت صفر

در بخش (۲-۵) حالتی از پاسخ مدارهای الکتریکی را بررسی نمودیم که برای زمان‌های $t \geq 0$ هیچ منبع الکتریکی ورودی وجود نداشته و فقط عناصر سلف و خازن مدار دارای جریان و ولتاژ اولیه می‌باشند که این نوع پاسخ مدار را پاسخ ورودی صفر نامیدیم. حال در این بخش می‌خواهیم پاسخ مداری را به دست آوریم که عناصر سلف و خازن مدار، دارای شرایط اولیه نبوده ولی مدار، دارای منبع الکتریکی ورودی باشد. لذا به این نوع پاسخ مدار، پاسخ حالت صفر می‌گویند.

برای توصیف این نوع پاسخ مدار، شکل (۱۰-۵) را در نظر بگیرید که خازن مدار، فاقد ولتاژ اولیه می‌باشد؛ زیرا کلید قبل از زمان $t=0$ در حالت وصل بوده و منبع جریان، هیچ تأثیری در مدار RC ندارد. حال اگر در زمان $t=0$ ، کلید مورد نظر باز شود با استفاده از قانون KCL برای سه عنصر موازی منبع، خازن و مقاومت می‌توان نوشت:

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = i(t) = I_0 \quad t \geq 0, \quad v_C(0) = 0 \quad (10-5)$$

لازم به ذکر است که با استفاده از قانون KVL در می‌باییم که ولتاژ دو سر سه عنصر با هم مساوی هستند. معادله (۱۸-۵) یک معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه اول می‌باشد که برای حل آن، نیاز به تعیین جواب معادله دیفرانسیل همگن ($v_h(t)$) و یک جواب خصوصی ($v_p(t)$) از معادله دیفرانسیل ناهمگن می‌باشد. با جمع این دو جواب خواهیم داشت:

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p(t) \quad (۱۹-۵)$$

با توجه به معادله دیفرانسیل همگن با صفر قرار دادن سمت راست معادله (۱۸-۵) به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$C \cdot \frac{dv_h(t)}{dt} + \frac{v_h(t)}{R} = 0$$

لذا با حل آن جواب همگن به شکل زیر بدست می‌آید:

$$v_h(t) = K \cdot e^{-t/RC} \quad (۲۰-۵)$$

برای تعیین یک جواب خصوصی از معادله (۱۸-۵) کافی است ساده‌ترین مقدار ولتاژ $v_C(t)$ را در نظر گرفت که در این معادله، صادق باشد. لذا ساده‌ترین جواب به صورت مقدار ثابت زیر خواهد بود:

$$v_p(t) = R \cdot I_o \quad (۲۱-۵)$$

با جمع کردن دو جواب معادله همگن و جواب خصوصی، جواب کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$v_C(t) = K \cdot e^{-t/RC} + R \cdot I_o$$

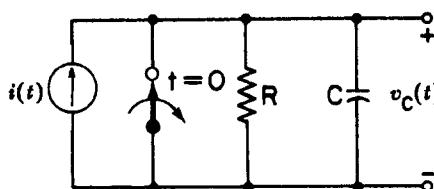
حال ضریب مجهول K را می‌توان با شرط اولیه $v_C(0) = o$ تعیین نمود. یعنی،

$$o = K + R \cdot I_o$$

$$K = -R \cdot I_o$$

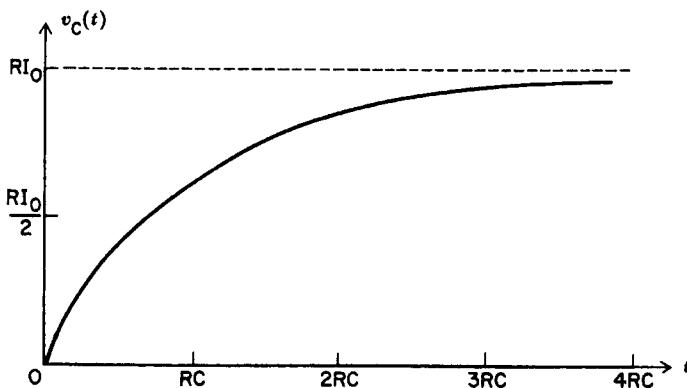
در نتیجه خواهیم داشت:

$$v_C(t) = R \cdot I_o \left(1 - e^{-t/RC} \right) \quad t \geq o \quad (۲۲-۵)$$



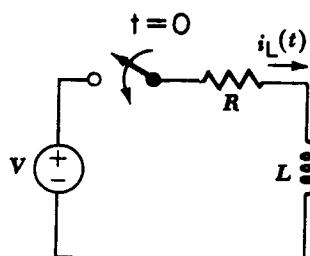
شکل (۱۰-۵): مدار RC با منبع جریان ورودی

شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ را می‌توان در شکل (۱۱-۵) مشاهده نمود که با گذشت زمان طولانی، ولتاژ $v_C(t)$ به مقدار ثابت $R.I_0$ میل خواهد کرد. لازم به ذکر است که مقدار RC برابر ثابت زمانی مدار می‌باشد ($\tau = RC$).



شکل (۱۱-۵): شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ برای مدار شکل (۱۰-۵)

مثال (۴-۵): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۲-۵) و در زمان $t=0$ ، کلید موردنظر بسته می‌شود. در صورتی که جریان اولیه سلف $i_L(0)=0$ باشد جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۱۲-۵): مدار RL مربوط به مثال (۴-۵)

حل: با استفاده از قانون KVL در حلقه موجود در مدار، می‌توان نوشت:

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R.i(t) = V \quad t \geq 0$$

برای یافتن جواب معادله همگن، کافی است سمت راست معادله اخیر را برابر صفر قرار داده و با توجه به اینکه $i(0) = 0$ می‌باشد لذا،

$$i_h(t) = K \cdot e^{-(R/L)t} \quad t \geq 0$$

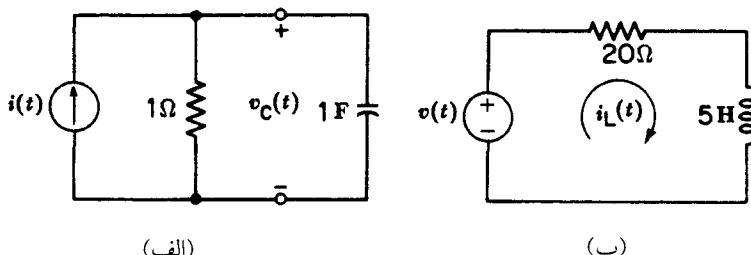
جواب خصوصی نیز برابر $i_p(t) = \frac{V}{R}$ می‌باشد. لذا با جمع جواب معادله همگن و جواب خصوصی خواهیم داشت:

$$i_h(t) = K \cdot e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} + \frac{V}{R} \quad t \geq 0$$

با توجه به آنکه در زمان $t=0$ ، $i(0) = 0$ می‌باشد لذا $K = -\frac{V}{R}$ بوده و در نهایت داریم:

$$i(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \right) \quad t \geq 0$$

تمرین (۴-۵): در مدارهای الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۳-۵) اگر برای $t \geq 0$ ، منبع جریان $I = 1A$ و منبع ولتاژ $V = 3V$ باشند، ولتاژ $v_C(t)$ در شکل (۱۳-۵-الف) و جریان $i_L(t)$ را در شکل (۱۳-۵-ب) بیابید.



شکل (۱۳-۵): مدارهای الکتریکی مربوط به تمرین (۴-۵)

جواب: $v_C(t) = (1 - e^{-t})$ و $i_L(t) = \frac{3}{2} (1 - e^{-4t})$

۴-پاسخ کامل

در بخش‌های (۲-۵) و (۳-۵) بترتیب پاسخ مدارهای الکتریکی را ناشی از حالات اولیه سلف‌ها و خازن‌ها، و پاسخ مدار را نسبت به منابع ورودی بیان نمودیم که با نامهای پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر مشخص کردیم. حال اگر مداری دارای منابع ورودی همراه با حالات اولیه برای سلف‌ها و خازن‌ها باشند، پاسخ مدار را پاسخ کامل^۱ می‌نامند. لذا می‌توان گفت که پاسخ‌های ورودی صفر و حالت صفر، حالات‌های خاصی از

^۱- Complete Response

پاسخ کامل خواهد بود. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که پاسخ کامل هر مدار خطی تغییرنایذیر با زمان، برابر مجموع پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر خواهد بود. برای این منظور مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۴-۵) را در نظر بگیرید. در این مدار، فرض کنید که $i_S(t) = I_0$ و ولتاژ اولیه خازن در زمان $t = 0$ هم $v_C(0) = V_0$ باشد که کلید در زمان $t = 0$ از وضعیت a به b تغییر وضعیت می‌دهد، پس برای زمان $t \geq 0$ ، مدار الکتریکی هم دارای حالت اولیه خازن و هم منبع ورودی جریان است. با کاربرد قانون KCL در مدار مذکور خواهیم داشت:

$$C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = I_0 \quad v_C(0) = V_0, \quad t \geq 0 \quad (23-5)$$

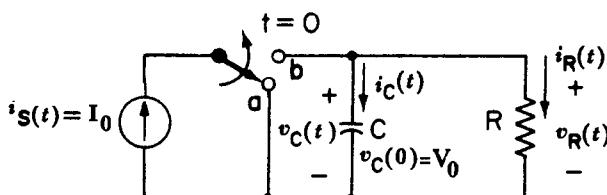
برای حل این مدار، سه پاسخ حالت صفر، ورودی صفر و پاسخ کامل را به طور جداگانه محاسبه نموده و نشان می‌دهیم که پاسخ کامل از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر نیز قابل محاسبه خواهد بود.

پاسخ ورودی صفر: معادله دیفرانسیل مدار در حالت ورودی صفر (یعنی $i_S(t) = 0$) برابر است با:

$$C \cdot \frac{dv'_C(t)}{dt} + \frac{v'_C(t)}{R} = 0 \quad v'_C(0) = V_0, \quad t \geq 0 \quad (24-5)$$

که با حل این معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$v'_C(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} \quad t \geq 0 \quad (25-5)$$



شکل (۱۴-۵): مدار الکتریکی RC با منبع ورودی و حالت اولیه خازن

پاسخ حالت صفر: معادله دیفرانسیل مدار در وضعیت حالت صفر (یعنی $v_C(0) = 0$) برابر است با:

$$C \cdot \frac{dv''_C(t)}{dt} + \frac{v''_C(t)}{R} = I_0 \quad v''_C(0) = 0 \quad (26-5)$$

که با حل این معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$v_C''(t) = R \cdot I_o \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad t \geq 0 \quad (27-5)$$

پاسخ کامل: اکنون معادله دیفرانسیل مدار واقعی که همان معادله (۲۳-۵) می‌باشد را به‌طور مستقیم حل می‌کنیم. برای این منظور ابتدا جواب معادله همگن را محاسبه می‌نماییم:

$$v_{Ch}(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (28-5)$$

همچنین ساده‌ترین جواب خصوصی معادله (۲۳-۵) به‌صورت $v_{Cp}(t) = R \cdot I_o$ می‌باشد و در نتیجه، جواب کلی معادله (۲۳-۵) برابر خواهد بود با:

$$v_C(t) = v_{Ch}(t) + v_{Cp}(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + R \cdot I_o \quad (29-5)$$

حال برای تعیین ضریب مجهول K از شرط اولیه $v_C(o) = V_o$ در زمان $t = o$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} V_o &= K + R \cdot I_o \\ K &= V_o - R \cdot I_o \end{aligned} \quad (30-5)$$

با جایگذاری رابطه (۳۰-۵) در (۲۹-۵) پاسخ کامل مدار برابر است با:

$$v_C(t) = (V_o - R \cdot I_o) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + R \cdot I_o \quad (31-5)$$

با مرتب سازی معادله (۳۱-۵) خواهیم داشت:

$$v_C(t) = \left[V_o \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right] + \left[R \cdot I_o \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \right] \quad (32-5)$$

که در این معادله، جمله داخل کروشه اول، همان پاسخ ورودی صفر ارائه شده در معادله (۲۵-۵)، و جمله داخل کروشه دوم، پاسخ حالت صفر ارائه شده در معادله (۲۷-۵) خواهد بود. به عبارت دیگر، پاسخ کامل مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، از جمع پاسخ‌های ورودی صفر و حالت صفر تعیین می‌شوند.

مثال (۵-۵): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۴-۵) اگر $R = \frac{1}{2}\Omega$ ، $C = \frac{1}{2}\mu F$ ، $I_o = 2A$ و $V_o = -3V$ باشد، نحوه تغییرات ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید و نشان دهید که از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر به دست می‌آید. حل: با استفاده از معادله (۲۵-۵) پاسخ ورودی صفر برابر است با:

$$v'_C(t) = -3 \times e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

همچنین با استفاده از معادله (۲۷-۵) پاسخ حالت صفر به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

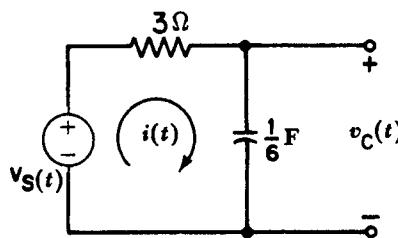
$$v_C''(t) = (1 - e^{-4t}) \quad t \geq 0$$

از جمع دو پاسخ حالت صفر و ورودی صفر خواهیم داشت:

$$v_C(t) = 1 - 4e^{-4t} \quad t \geq 0$$

حال اگر از معادله (۳۱-۵) که پاسخ کامل مدار است، استفاده کنیم به رابطه اخیر خواهیم رسید.

تمرین (۵-۵): در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۱۵-۵)، فرض کنید که $v_S(t) = 1V$ و $v_S(0) = 2V$ باشد. برای زمان $t \geq 0$ ، ولتاژ $v_C(t)$ را بیابید.



شکل (۱۵-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۵)

$$i(t) = \sqrt{\mu} e^{-4t} \text{ (A)} \quad , \quad v_C(t) = 2 - e^{-4t} \text{ (V)}$$

۵-۵- شرایط اولیه در مدارهای با کلیدزنی

در این بخش به بررسی شرایط اولیه خازن‌ها و سلف‌ها در زمان‌های کلیدزنی می‌پردازیم. در فرآیند کلیدزنی در مدارهای الکتریکی مورد بحث، فرض می‌شود که کلیدزنی در لحظه $t=0$ اتفاق افتند. لذا مناسب است که وضعیت مدار را قبل از کلیدزنی و بعد از کلیدزنی از هم متمایز نماییم. به همین منظور از نماد 0 برای نشان دادن لحظه قبل از کلیدزنی و از نماد ${}^+$ برای نشان دادن لحظه بعد از کلیدزنی استفاده می‌شود. در فصل چهارم، عنصر خازن را به عنوان یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی مطرح نمودیم که روابط زیر برای آن صادق می‌باشد:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (33-5)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C v_C^2 \quad (34-5)$$

رابطه (۳۴-۵) نشان می‌دهد که هر تغییر ناگهانی در ولتاژ خازن (یعنی $\frac{dv_C(t)}{dt} = \infty$) نیاز به یک جریان خازن به مقدار بینهایت خواهد بود. همچنین رابطه (۳۴-۵) نشان می‌دهد که تغییر ناگهانی در ولتاژ خازن باعث تغییر ناگهانی در انرژی ذخیره شده در خازن می‌شود که آن هم نیاز به یک منبع با توان بینهایت می‌باشد که هر دو واقعه، غیرممکن می‌باشد. لذا با توجه به آنکه تغییرات جریان نمی‌تواند بینهایت باشد، در نتیجه می‌توان گفت که ولتاژ خازن در لحظه کلیدزنی نمی‌تواند به طور ناگهانی تغییر کند. به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$v_C(o^+) = v_C(o^-) \quad (35-5)$$

این موضوع را می‌توان به گونه‌ای دیگر برای عنصر سلف بیان نمود. در فصل چهارم برای عنصر سلف روابط زیر را ارائه نمودیم:

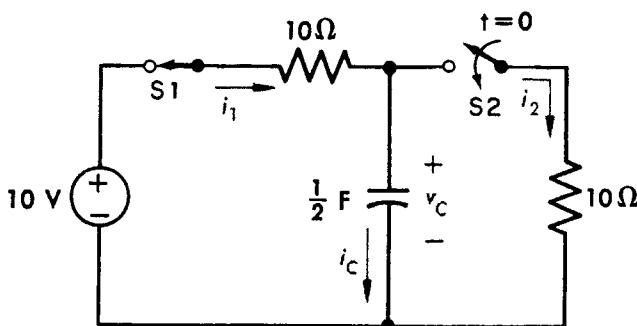
$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (36-5)$$

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \quad (37-5)$$

حال اگر جریان سلف در لحظه کلیدزنی تغییر ناگهانی داشته باشد (یعنی $\frac{di_L(t)}{dt} = \infty$) ولتاژ دو سر سلف باید به یک مقدار بینهایتی تغییر یابد. همچنین نیاز به یک توان بینهایت خواهد بود که هر دو وضعیت، غیرممکن می‌باشد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که جریان سلف در لحظه کلیدزنی نمی‌تواند به طور ناگهانی تغییر یابد. لذا خواهیم داشت:

$$i_L(o^+) = i_L(o^-) \quad (38-5)$$

مثال (۶-۵): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۶-۵) فرض می‌شود که کلید S1 به مدت طولانی بسته بوده است و در لحظه $t=0$ ، کلید S2 نیز بسته می‌شود. مقادیر $v_C(o^+)$ و $i_C(o^+)$ را (یعنی ولتاژ و جریان خازن، پس از لحظه بسته شدن کلید S2) بیابید.



شکل (۱۶-۵): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۶-۵)

حل: با توجه به آنکه کلید S1 به مدت طولانی بسته بوده است، لذا عنصر خازن به صورت اتصال باز در می‌آید و در نتیجه ولتاژ خازن به 10V افزایش می‌یابد. در این حالت، دیگر هیچ جریانی از مدار نمی‌گذرد. یعنی،

$$v_C(o^-) = 10\text{V} \quad , \quad i_C(o^-) = 0\text{A}$$

در لحظه $t=0$ که کلید S2 نیز بسته می‌شود، با توجه به آنکه ولتاژ دو سر خازن نمی‌تواند به طور ناگهانی تغییر کند، لذا با توجه به اصل پیوستگی ولتاژ خازن خواهیم داشت:

$$v_C(o^+) = v_C(o^-) = 10\text{V}$$

حال برای یافتن $i_C(o^+)$ کافی است که در زمان $t=o^+$ ، قانون KVL را برای هر دو حلقه مدار بنویسیم:

$$10 - 10i_1(o^+) - v_C(o^+) = 0$$

$$v_C(o^+) - 10i_4(o^+) = 0$$

و با استفاده از قانون KCL برای گره مدار داریم:

$$i_1(o^+) = i_4(o^+) + i_C(o^+)$$

از حل سه معادله اخیر خواهیم داشت:

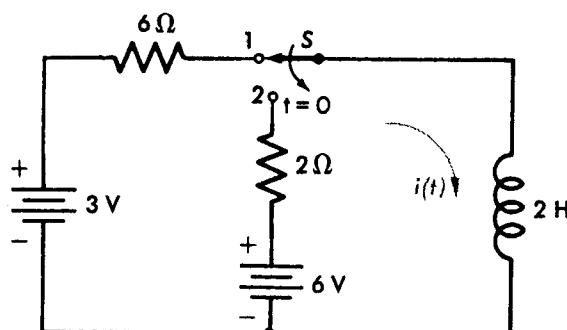
$$i_1(o^+) = 0\text{A}$$

$$i_4(o^+) = 1\text{A}$$

$$i_C(o^+) = -1\text{A}$$

مثال (۷-۵): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۷-۵) مورد نظر می‌باشد. در این مدار، کلید S به مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده است و در لحظه $t=0$ در وضعیت ۲ قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین:

(الف) جریان سلف $i_L(t)$ برای $t \geq 0$ ؛ (ب) مقادیر $v_L(o^+)$ ، $v_L(o^-)$ و $i_C(o^+)$



شکل (۷-۵): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۷-۵)

حل: الف) در زمان $t < 0$ که کلید به مدت طولانی در وضعیت ۱ قرار داشته است، سلف به صورت اتصال کوتاه در می‌آید. لذا،

$$i_L(o^-) = \frac{3}{6} = 0.5 \text{ A}$$

با توجه به عدم تغییر ناگهانی جریان سلف در وضعیت کلید، می‌توان نوشت:

$$i_L(o^+) = i_L(o^-) = 0.5 \text{ A}$$

حال برای یافتن جریان سلف در زمان $t \geq 0$ ، باید با استفاده از قانون KVL، معادله دیفرانسیل مدار را به صورت زیر مشخص نمود:

$$2 \frac{di_L(t)}{dt} + 2i_L(t) = 6, \quad i_L(o^+) = 0.5 \text{ A}$$

با تعیین جواب معادله همگن و جواب خصوصی معادله دیفرانسیل اخیر، جریان $i_L(t)$ را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$i_L(t) = 3 - 2/5 e^{-t} (\text{A})$$

ب) با توجه به اتصال کوتاه شدن سلف در زمان قبل از تغییر وضعیت کلید، نتیجه می‌گیریم که $v_L(o^-) = 0$ می‌باشد. در لحظه $t = o^+$ با استفاده از قانون KVL در این زمان می‌توان نوشت:

$$v_L(o^+) + i_L(o^+) \times 2 = 6$$

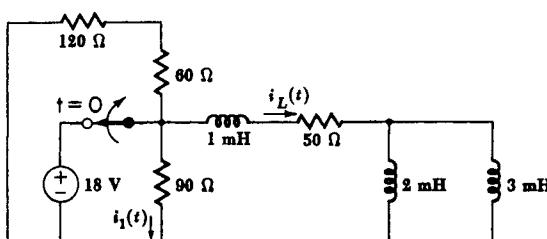
و در نتیجه،

$$v_L(o^+) = 6 - (0.5) \times 2 = 5 \text{ V}$$

بنابراین با توجه به رابطه $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ داریم:

$$\frac{di_L(o^+)}{dt} = \frac{v_L(o^+)}{L} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ A/sec}$$

تمرین (۵-۶): برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۸-۵) فرض می‌شود که کلید موردنظر به مدت طولانی بسته بوده است و در زمان $t = 0$ باز می‌شود. در این مدار، جریان $i_1(t)$ و $i_L(t)$ را برای زمان $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۱۸-۵): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۶)

$$i_1(t) = -0.124e^{-5t} \text{ (A)} \quad , \quad i_L(t) = 0.36e^{-5t} \text{ (A)}$$

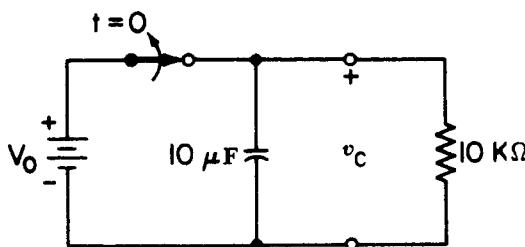
۵-۶- خلاصه و نتیجه‌گیری

در فصل‌های دوم و چهارم، با عناصر مقاومت، سلف، خازن و منابع الکتریکی آشنا شدیم و در فصل سوم، تحلیل مدارهای الکتریکی مقاومتی را مورد بررسی قرار دادیم. در این فصل به تحلیل مدارهای خطی مرتبه اول که شامل مدارهای RL یا RC بودند، پرداختیم. خلاصه این مباحث را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

- پاسخ ورودی صفر یک مدار الکتریکی به این معنا است که در سیستم، هیچ منبع الکتریکی ورودی وجود نداشته باشد و پاسخ مدار، فقط تحت تأثیر شرایط اولیه سلف‌ها یا خازن‌های مدار باشند. شرایط اولیه برای عنصر سلف، جریان اولیه آن (یعنی $i_L(0)$) و برای عنصر خازن، ولتاژ اولیه آن (یعنی $v_C(0)$) می‌باشد.
- در صورتی که در یک مدار الکتریکی، پاسخ مدار را بر اساس منابع الکتریکی ورودی بدست آورده و اثر شرایط اولیه سلف‌ها و خازن‌ها را در تحلیل مدار در نظر نگیریم، آن پاسخ را پاسخ حالت صفر می‌گوییم.
- در صورتی که یک مدار الکتریکی تحت تأثیر منابع ورودی و شرایط اولیه سلف‌ها و خازن‌ها باشند، با تحلیل آن به پاسخ کامل مدار دسترسی پیدا کردہ‌ایم. این پاسخ کامل مدار را می‌توان از جمع کردن پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر مدار بدست آورد.
- با توجه به آنکه در عنصر خازن، ولتاژ آن در زمان کلیدزنی، قادر به تغییر ناگهانی نیست، لذا با انجام کلیدزنی در زمان $t=0$ در هر مدار الکتریکی، $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ صادق خواهد بود.
- عمل کلیدزنی در مدارهای الکتریکی RL باعث تغییر ناگهانی جریان سلف‌ها نخواهد شد. زیرا لازمه این امر نیاز به ایجاد یک ولتاژ بینهایت در دو سر سلف است. در نتیجه در زمان کلیدزنی در $t=0$ و برای عنصر سلف، رابطه $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ صادق خواهد بود.

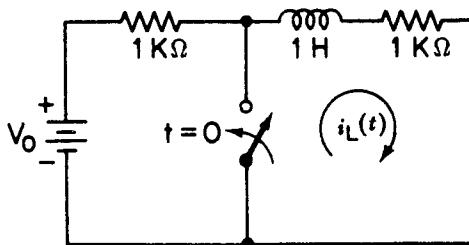
۷-۵- مسائل مروری

- ۱- در صورتی که در مدار ارائه شده در شکل (۱۹-۵) کلید موردنظر به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ باز گردد، ولتاژ دو سر خازن را برای زمان $t \geq 0$ بیابید.



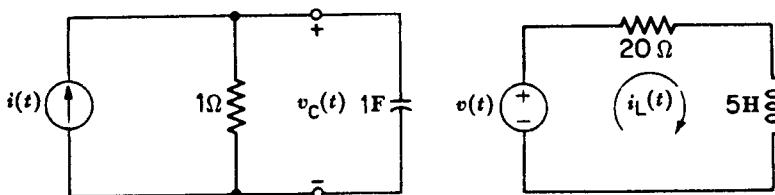
شکل (۱۹-۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱)

- ۲- مدار الکتریکی مطابق با شکل (۲۰-۵) موردنظر می‌باشد. در این مدار، کلید موردنظر به مدت طولانی باز بوده و در زمان $t=0$ بسته می‌شود. تغییرات جریان ($i_L(t)$) را برای $t \geq 0$ بیابید.



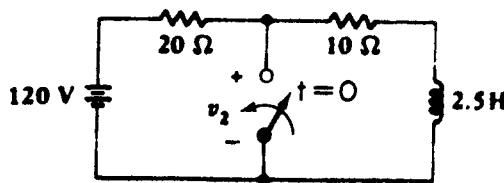
شکل (۲۰-۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۲)

- ۳- در دو مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲۱-۵)، فرض کنید که در مدار (الف)، $v_C(0)=0V$ و در مدار (ب) $v=5V$ و $i(0)=1A$ باشد. در مدار (الف) $v_C(t)$ در مدار (ب) $i_L(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



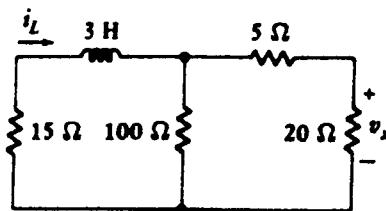
شکل (۲۱-۵): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۳)

- ۴- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲۲-۵)، کلید موردنظر که به مدت طولانی باز بوده است در زمان $t=0$ بسته می‌شود. در این مدار، جریان سلف را برای $t \geq 0$ تعیین نمایید.



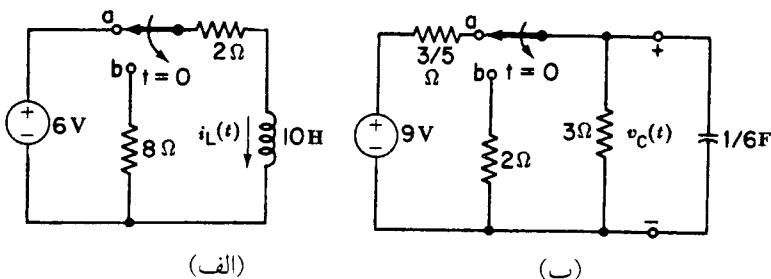
شکل (۲۲-۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۴)

- شکل (۲۳-۵) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در زمان $t=0$ ، $i_L(0)=10A$ و $v_x(t)$ را بایابید.



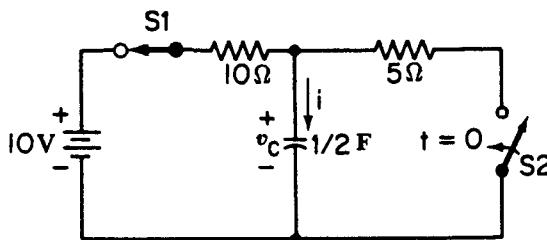
شکل (۲۳-۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۵)

- در مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۲۴-۵) در زمان $t=0$ ، کلید از وضعیت a (که به مدت طولانی در این وضعیت قرار داشته است) به وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در مدار (الف)، جریان ($i_L(t)$) و در مدار (ب)، ولتاژ ($v_C(t)$) را بایابید.



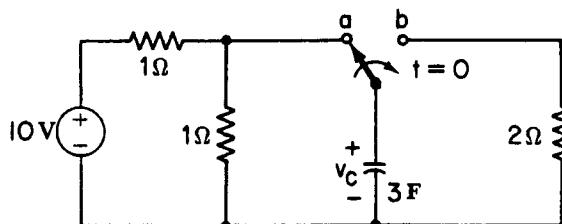
شکل (۲۴-۵): مدارهای الکتریکی مربوط به سوال (۶)

- شکل (۲۵-۵) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، کلید S1 به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ ، کلید S2 نیز بسته می‌شود. در این حالت، ولتاژ ($v_C(t)$) برای $t \geq 0$ بایابید.
راهنمایی: از تبدیل مدار معادل تونن به نورتن استفاده کنید.



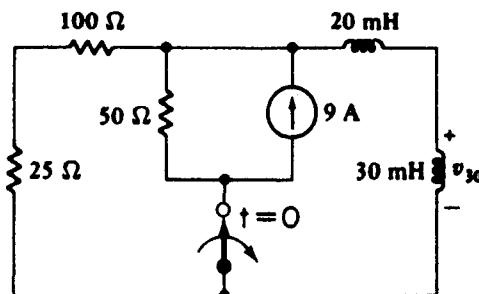
شکل (۲۵-۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۷)

- ۸- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲۶-۵) کلید موردنظر به مدت طولانی در وضعیت a قرار داشته و در زمان $t = 0$ در وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در این حالت، ولتاژ $v_C(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



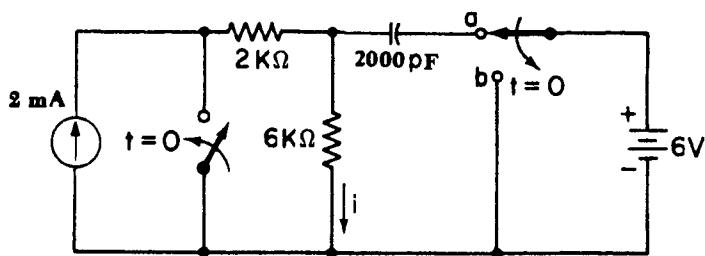
شکل (۲۶-۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۸)

- ۹- کلید موردنظر در مدار الکتریکی شکل (۲۷-۵) به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t = 0$ باز می‌شود. برای زمان $t \geq 0$ ، $v_{30}(t)$ را بیابید.



شکل (۲۷-۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۹)

- ۱۰- در مدار الکتریکی شکل (۲۸-۵) کلید سمت چپ در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود و همزمان با آن، کلید سمت راست از وضعیت a به b تغییر حالت می‌دهد. در این حالت، $v_C(t)$ و $i(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



شکل (۲۸-۵): مدار الکتریکی مربوط به سوال (۱۰)

فصل هفتم

تجزیه و تحلیل مدارها در حالت دائمی سینوسی

۱-۷ - مقدمه

امواج سینوسی در علوم مهندسی، نقش مهمی را بازی می‌کنند. برای درک اهمیت این موضوع، همین مطلب کافی است که بدانیم تولید، انتقال و توزیع انرژی الکتریکی در اکثر قریب به اتفاق سیستم‌های قادر با امواج سینوسی صورت می‌گیرد. همچنین در بسیاری از مدارهای الکترونیکی و مخابراتی، از مولدهای با سیگنال سینوسی استفاده می‌شود. لذا به عنوان یک مهندس برق لازم است تا مدارهای الکتریکی را با ورودی‌های سینوسی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و پاسخ مدار را به این نوع منابع ورودی به دست آوریم.

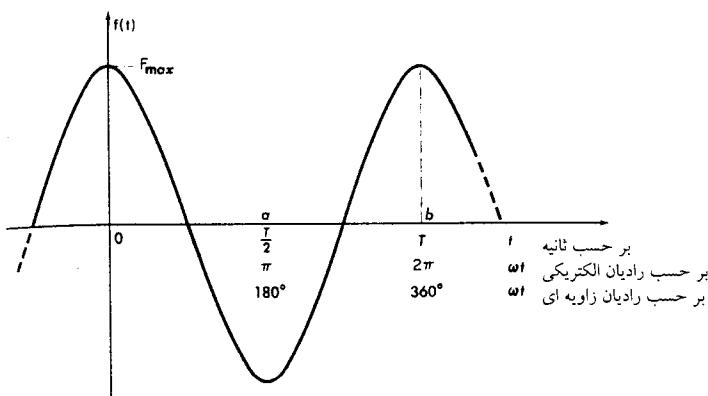
در فصل‌های قبلی، مدار خطی مرتبه اول و دوم را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. همچنین مثال‌هایی را بیان نمودیم که در خلال آنها، پاسخ مدارهای ساده به ورودی‌های سینوسی را به دست آوردیم. در این فصل می‌خواهیم روش ساده و کلی را برای تعیین پاسخ مدارهای متنوع به ورودی‌های سینوسی تعیین نماییم که این روش، با استفاده از ابزاری به نام فازور امکان پذیر خواهد بود.

۲-۷ - ویژگی‌های توابع سینوسی

قبل از اینکه وارد بحث اصلی این فصل شویم، بهتر است که ویژگی‌ها و اصطلاحات مربوط به امواج سینوسی را مورد بررسی مجلد قرار دهیم. شکل موج یک تابع سینوسی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$f(t) = F_{\max} \cos \omega t \quad (1-7)$$

که شکل موج این تابع در شکل (۱-۷) نشان داده شده است. در این شکل موج، F_{\max} بیانگر دامنه^۱ یا مقدار ماکزیمم موج، ω سرعت زاویه‌ای موج بر حسب rad/sec (یا deg/sec) و t متغیر زمانی شکل موج $f(t)$ می‌باشد. لازم به ذکر است که مفهوم تابع سینوسی به این معنی نیست که شکل موج موردنظر حتماً بر حسب یک تابع \sin می‌باشد، بلکه با توجه به آنکه هر موج سینوسی یا کسینوسی را می‌توان بر حسب تابع کسینوسی (یا ایجاد یک اختلاف زاویه ۹۰ درجه) نوشت. لذا کلیه امواج بر حسب \sin یا \cos را به عنوان توابع سینوسی در نظر می‌گیریم.



شکل (۱-۷): شکل موج سینوسی تابع $f(t) = F_{\max} \cos \omega t$

توابع سینوسی موردنظر به صورت توابع متناوب با دوره تناوب T می‌باشند. منظور از متناوب بودن تابع $f(t)$ با دوره تناوب T این است که رابطه زیر صادق باشد:

$$f(t+T) = f(t) \quad (2-7)$$

حال برای این شکل موج متناوب $f(t)$ ، فرکانس موج را تعریف می‌کنیم. تعداد سیکل‌هایی را که موج مربوطه در یک ثانیه طی می‌کند، فرکانس موج می‌نامیم و با متغیر f و با واحد Hz (سیکل بر ثانیه) نشان می‌دهیم. بر اساس این تعریف می‌توان نوشت:

$$f = \frac{1}{T} \quad (3-7)$$

از طرف دیگر، اگر معادله (۱-۷) را بر حسب ωt (که مسافت طی شده توسط موج است) رسم کنیم، آنگاه هر سیکل، متناظر با زاویه الکتریکی 2π رادیان یا ۳۶۰ درجه می‌باشد. از این رو سرعت زاویه‌ای ω را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

^۱- Amplitude

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4-7)$$

در نتیجه، معادله (۱-۷) را می‌توان به صورت‌های زیر نیز بیان نمود:

$$f(t) = F_{\max} \cos \omega t = F_{\max} \cos 2\pi f t = F_{\max} \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (5-7)$$

همچنین به جای استفاده از دامنه موج F_{\max} ، می‌توان از مقدار مؤثر موج استفاده کرد. مقدار مؤثر موج $f(t)$ را با F_{rms} بیان می‌کنیم که به صورت زیر بدست می‌آید.

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_{\max} \quad (6-7)$$

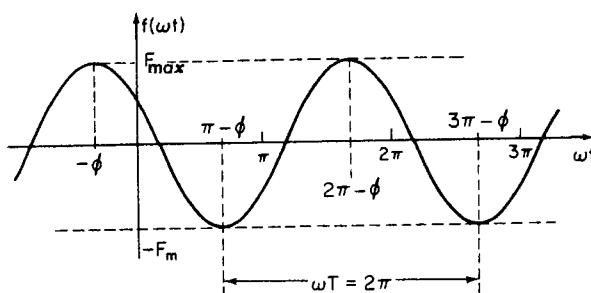
پس رابطه اخیر را می‌توان به شکل زیر هم نوشت:

$$f(t) = \sqrt{2} F_{rms} \cos(\omega t) \quad (7-7)$$

حال می‌خواهیم مفاهیم پیش‌فازی و پس‌فازی یک موج را بیان نماییم. در شکل (۲-۱)، مبداء موج $f(t)$ در محور زمان، در نقطه‌ای در نظر گرفته شده است که در آن زمان ($t=0$)، موج مذکور، دارای مقدار حداقل خود است. البته این مبداء زمانی را می‌توان در هر جای شکل موج $f(t)$ در نظر گرفت که این جایگایی در شکل موج را با زاویه فاز^۱ موج بیان می‌کنیم. شکل (۲-۷)، یک موج سینوسی با تابع

$$f(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (8-7)$$

را نشان می‌دهد که به ϕ زاویه فاز (یا زاویه موج) می‌گویند. این زاویه به آن معنی است که موج مذکور در $t=0$ ، دارای زاویه ϕ می‌باشد. بعبارت دیگر، زاویه ϕ میان اختلاف فاز تابع سینوسی نسبت به مبداء زمان یا سایر توابع سینوسی است. در صورتی که زاویه ϕ ، ثابت باشد، نتیجه می‌گیریم که موج مذکور نسبت به مبداء زمان به مقدار ϕ درجه پیش (جلو) افتاده است و اگر زاویه ϕ ، منفی باشد، به این معنی است که موج $f(t)$ نسبت



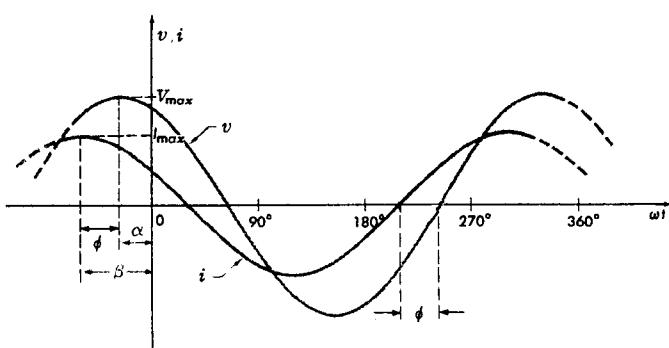
شکل (۲-۷): شکل موج سینوسی با تابع $f(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \phi)$

به مبدأ زمان به مقدار ϕ درجه پس (عقب) افتاده است. به این مفاهیم، بترتیب پیش‌فازی و پس‌فازی موج می‌گوییم. برای درک بهتر این موضوع، بهتر است از دو موج سینوسی (به عنوان مثال یک موج جریانی و یک موج ولتاژی) به صورت زیر استفاده کنیم:

$$v(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \alpha) \quad (9-7)$$

$$i(t) = I_{\max} \cos(\omega t + \beta) \quad (10-7)$$

این دو موج در شکل (۳-۷) نشان داده شده است. در صورتی که اختلاف زاویه بین این دو موج، برابر $\phi = \alpha - \beta$ باشد، آنگاه با مقادیر α و β مشخص شده در شکل، در می‌باشیم که موج ولتاژ پس از موج جریان به مقدار حداقل خود می‌رسد. لذا می‌گوییم که موج ولتاژ، نسبت به موج جریان به مقدار ϕ درجه پس‌فاز^۱ می‌باشد و یا بر عکس، موج جریان نسبت به موج ولتاژ به مقدار ϕ درجه پیش‌فاز^۲ است. مقادیر α و β را می‌توان بر حسب رادیان یا درجه بیان نمود ولی معمولاً زاویه پیش‌فاز را بر حسب درجه بیان می‌کنند و کاربرد زاویه بر حسب درجه در محاسبات بعدی این نوع مدارها مناسب‌تر خواهد بود. حال اگر در مدارهای الکتریکی موردنظر، منابع جریان و ولتاژ به شکل توابع سینوسی ارائه شده با مشخصات فوق باشد، آنگاه اصطلاحاً می‌گوییم که مدار با تحریک سینوسی است.



شکل (۳-۷): مفاهیم پس‌فازی و پیش‌فازی بین دو موج $i(t)$ و $v(t)$

مثال (۱-۷): در صورتی که دو منبع ولتاژ سینوسی با مشخصات $v_1(t) = 100 \cos(377t + 60^\circ)$ و $v_2(t) = 50 \cos(377t + 30^\circ)$ گفت که موج ولتاژ $v_1(t)$ نسبت به موج ولتاژ $v_2(t)$ ، به مقدار 30° درجه عقب‌تر (پس‌فاز) است و بر عکس، موج ولتاژ $v_2(t)$ به مقدار 30° درجه از ولتاژ $v_1(t)$ ، جلوتر (پیش‌فاز) می‌باشد.

¹- Lag

²- Lead

تمرین (۱-۷): اگر دو جریان در یک مدار، برابر $i_1(t) = 120 \cos(100\pi t + 30^\circ)$ و $i_2(t) = 20 \sin(100\pi t - 50^\circ)$ باشد، آنگاه جریان $i(t)$ چقدر جلوتر (پیش فاز) از $i_1(t)$ است.

جواب: 170° - درجه جلوتر یا 170° درجه عقب تر

۲-۷- نمایش فازور در توابع سینوسی

در این بخش، می خواهیم روشی را ارائه دهیم که به کمک آن می توانیم تابع تحریک سینوسی یا پاسخ های سینوسی را با نمایشی از اعداد مختلط به نام نمایش فازوری نشان دهیم. این نمایش، مبین مشخصات دقیق موج سینوسی است که به صورت تابعی تحلیلی از زمان بیان گردیده است. با استفاده از فازورها خواهیم دید که به جای مشتقها و انتگرال گیری های سینوسی (که در فصل های قبل به آنان اشاره کردیم)، مشخصات دیگری (از جمله $j\omega$ و $/j\omega$) جایگزین می گردد که تحلیل مدارها را در حالت سینوسی بسیار آسان می کند.

برای بیان مفهوم فازور از یک موج سینوسی $f(t)$ آغاز می کنیم که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$f(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{2} F_{rms} \cos(\omega t + \phi) \quad (11-7)$$

که در این رابطه، F_{\max} دامنه موج، ω مقدار مؤثر، ϕ سرعت زاویه ای و ϕ زاویه فاز موج $f(t)$ می باشند. حال به راحتی می توان اثبات کرد که مجموع جبری هر تعداد از امواج سینوسی با سرعت زاویه ای یکسان (مثل ω) و با هر تعداد از مشتقها و انتگرال گیری از آنها با هر مرتبه، خود یک موج سینوسی با همان سرعت زاویه ای خواهد بود. به عبارت دیگر، هر گونه عملیات جبری، مشتق گیری و انتگرال گیری با هر مرتبه، سرعت زاویه ای موج ها را تغییر نمی دهد. پس می خواهیم با استفاده از تبدیل فازور از این خاصیت مهم استفاده کنیم. برای این منظور می توان رابطه (۱۱-۷) را به صورت قسمت حقیقی یک تابع مختلط زیر در نظر گرفت:

$$f(t) = \operatorname{Re}[F_{\max} \cos(\omega t + \phi) + jF_{\max} \sin(\omega t + \phi)] \quad (12-7)$$

که عملگر Re به معنای در نظر گرفتن قسمت حقیقی یک عدد مختلط می باشد. لازم به ذکر است که برای مرور بر اعداد مختلط و خواص آنان می توان به ضمیمه (الف) مراجعه نمود. اما براساس رابطه اول^۱ می توان نوشت:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (13-7)$$

حال اگر در رابطه (۱۲-۷) از خاصیت رابطه اول را رائمه شده در رابطه (۱۳-۷) استفاده کنیم، آنگاه آن رابطه به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Re}[F_{\max} e^{j(\omega t + \phi)}] \\ &= \operatorname{Re}[F_{\max} e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2} F_{rms} e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \sqrt{2} \operatorname{Re}[F_{rms} e^{j\phi} e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (14-7)$$

حال اگر از رابطه اخیر، مشتق، انتگرال‌گیری و هر عملیات دیگری انجام دهیم جمله $e^{j\omega t}$ ثابت باقی می‌ماند و جمله ضربی آن تغییر می‌کند و این یعنی اینکه سرعت زاویه‌ای موج، تغییر نمی‌کند. لذا فازور موج $f(t)$ را به صورت \vec{F} نمایش داده و به مقدار زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{F} = F_{rms} e^{j\phi} = F_{rms} \angle \phi \quad (15-7)$$

یعنی شکل موج $f(t)$ در رابطه (۱۴-۷) را با بیان مفهوم فازور به شکل زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\vec{F} e^{j\omega t}] \quad (16-7)$$

به عبارت دیگر، به جای آنکه موج $f(t)$ را به صورت رابطه (۱۴-۷) نمایش دهیم، با فازور آن، یعنی رابطه (۱۵-۷) مشخص می‌کنیم. یعنی هر موج $f(t)$ را با مقدار مؤثر موج (به عنوان اندازه موج)، به همراه زاویه فاز آن (به عنوان زاویه موج) بیان می‌کنیم. با استفاده از دو مشخصه فازور (یعنی F_{rms} و ϕ) در کنار سرعت زاویه‌ای ω ، موج $f(t)$ به طور کامل مشخص می‌گردد.

مثال (۲-۷): در صورتی که ولتاژ یک منبع سینوسی به صورت $v = 110\sqrt{2} \cos(377t + 60^\circ)$ باشد آنگاه فازور این ولتاژ $i(t)$ برابر $\vec{I} = 110\angle 60^\circ$ خواهد بود.

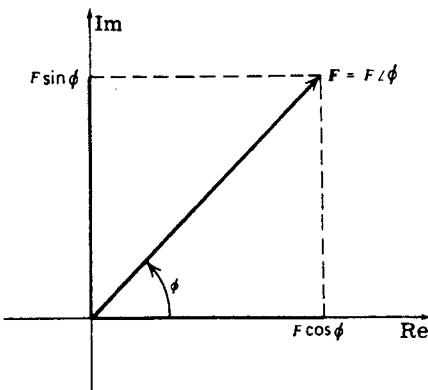
مثال (۳-۷): در صورتی که فازور جریان یک منبع سینوسی برابر $\vec{I} = 50\angle -30^\circ$ باشد و سرعت زاویه‌ای موج هم $120\pi \text{ rad/sec}$ باشد آنگاه تابع زمانی منبع جریان به صورت $i(t) = 50\sqrt{2} \cos(120\pi t - 30^\circ)$ است.

فازور \vec{F} برای تابع $f(t)$ ، از نظر ریاضی یک بردار دو بعدی است که با نمایش در رابطه (۱۵-۷)، دامنه بردار F_{rms} و ϕ زاویه بردار نسبت به محور افقی است که در شکل (۴-۷) نشان داده شده است. البته زاویه فازور ϕ نمایانگر وضعیت زمانی بردار است نه

وضعيت مکانی آن (به عبارتی می‌توان گفت که شکل موج، یک شیفت زمانی به اندازه ϕ پیدا می‌کند که می‌تواند پس فاز یا پیش فاز باشد). این شکل نمایش را فرم قطبی^۱ فازور \vec{F} می‌نامیم. شکل دیگر نمایش فازور به فرم دکارتی آن معروف است که براساس مولفه‌های حقیقی و موهومی فازور \vec{F} به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\vec{F} = F_{rms} \angle \phi = F_{rms} \cos \phi + j F_{rms} \sin \phi \quad (17-7)$$

که $F_{rms} \cos \phi$ قسمت حقیقی نمایش دکارتی فازور \vec{F} ، و $F_{rms} \sin \phi$ قسمت موهومی نمایش دکارتی فازور \vec{F} است.



شکل (۴-۷): نمایش برداری فازور

حال می‌خواهیم مزایای اولیه استفاده از فازورها را نشان دهیم. برای این منظور، فرض کنید که دوتابع سینوسی $a(t)$ و $b(t)$ با سرعت زاویه‌ای یکسان ω به صورت زیر تعریف شوند:

$$a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$b(t) = \sqrt{2} B \cos(\omega t + \beta)$$

در صورتی که بخواهیم این دو موج را در حوزه زمان با هم جمع کنیم، یعنی $c(t) = a(t) + b(t)$ را محاسبه کنیم، باید از روابط مثلثاتی استفاده نماییم که نیاز به محاسبات زیادی دارد؛ اما می‌توان نشان داد که با استفاده از خاصیت فازور، این مجموع را به راحتی می‌توان انجام داد. برای این منظور می‌توان نوشت:

$$c(t) = a(t) + b(t)$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Re}[A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha) + B \cos(\omega t + \beta) + j B \sin(\omega t + \beta)]$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Re}\left[A e^{j(\omega t + \alpha)} + B e^{j(\omega t + \beta)} \right]$$

^۱- Polar Form

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\left(A e^{j\alpha} + B e^{j\beta} \right) e^{j\omega t} \right] \\
 &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[(\bar{A} + \bar{B}) e^{j\omega t} \right]
 \end{aligned}$$

حال اگر $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$ باشد، آنگاه:

$$c(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\bar{C} e^{j\omega t} \right]$$

لذا اثبات شد که برای جمع دو تابع سینوسی می‌توان دو تابع سینوسی هم فرکانس را ابتدا به صورت فازور در آورد و سپس با استفاده از جبر بردارها، فازورها را با هم جمع نموده و در نهایت، فازور به دست آمده را به حوزه زمان انتقال داد. از این موضوع می‌توان در قوانین KCL و KVL استفاده نمود.

کاربرد فازور در قوانین KVL و KCL

در فصول ابتدایی، قوانین KVL و KCL را در حوزه زمان بیان نمودیم. در مورد قانون KCL بیان نمودیم که مجموع جبری جریان‌های ورودی به هر گره و در هر لحظه از زمان، برابر صفر است. یعنی،

$$i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = 0 \quad (18-7)$$

که n به معنای تعداد شاخه‌های متصل به گره موردنظر است. حال اگر تمام جریان‌های $i_1(t)$ تا $i_n(t)$ به صورت جریان‌های سینوسی باشند، آنگاه براساس اثباتی که در قسمت قبل صورت گرفت، رابطه (۱۸-۷) را می‌توان به صورت جمع جبری فازوری هر یک از جریان‌ها نوشت که،

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_n = 0 \quad (19-7)$$

سادگی محاسبات در رابطه (۱۹-۷) بسیار بیشتر از محاسبات رابطه (۱۸-۷) است. همچنین در بیان قانون KVL گفته شد که در هر حلقه، جمع جبری ولتاژ‌های هر شاخه موجود در آن حلقه و در هر لحظه از زمان، برابر صفر است. به عبارت دیگر،

$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_m(t) = 0 \quad (20-7)$$

که m به معنای تعداد شاخه‌های موجود در حلقه موردنظر است. اکنون اگر تمام ولتاژ‌های $v_1(t)$ تا $v_m(t)$ به شکل توابع سینوسی باشند، آنگاه رابطه (۲۰-۷) را می‌توان برحسب فازورهای هر یک از ولتاژها به صورت زیر نوشت:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_m = 0 \quad (21-7)$$

با توجه به آنکه در روابط (۱۹-۷) و (۲۱-۷) با جمع برداری فازورها سروکار داریم، لذا محاسبات برداری، بسیار ساده‌تر از محاسبات توابع سینوسی در حوزه زمان است.

مثال (۴-۷): یک گره در مدار الکتریکی، از اتصال سه شاخه تشکیل شده است. با فرض آنکه مدار مذکور در حالت تحریک سینوسی باشد، تمام متغیرهای مدار به صورت تابع سینوسی است. حال اگر جریان‌های دو شاخه ورودی به گره برابر سینوسی باشند $i_1(t) = 5\cos(\omega t + 36^\circ)$ و $i_2(t) = 3\sqrt{2}\cos(\omega t - 135^\circ)$ باشد آنگاه جریان خروجی از گره را در شاخه سوم تعیین کنید.

حل: با توجه به قانون KCL برای این گره می‌توان نوشت:

$$i_3(t) + i_1(t) - i_2(t) = 0$$

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) = 5\cos(\omega t + 36^\circ) + 3\sqrt{2}\cos(\omega t - 135^\circ)$$

حال جمع دو تابع سینوسی فوق رواج مشکلی دارد. اما اگر از طریق فازوری حل کنیم، خواهیم داشت:

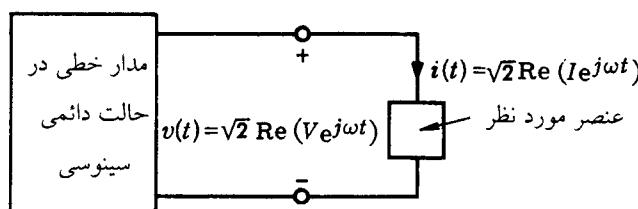
$$\vec{I}_3 = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 36^\circ + 3\angle -135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 0$$

حال جریان (t) را می‌توان با استفاده از فازور \vec{I}_3 به صورت زیر تشکیل داد:

$$i_3(t) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t + 0) = \cos \omega t$$

۳-۷- روابط فازوری اجزاء مدار (R و L و C)

در فصل‌های ابتدایی، روابط بین ولتاژ و جریان عناصر مقاومت، سلف، و خازن را بیان نمودیم. برای عنصر مقاومت، ارتباط بین ولتاژ و جریان به صورت خطی بود، ولی برای عناصر سلف و خازن، با روابط مستقیم و انگرالی سروکار داشتیم. این ارتباط بین متغیرهای ولتاژ و جریان، در حالت تحریک مدار با منبع سینوسی در شکل (۵-۷) نشان داده شده است. در این مدار، فرض کنید که ولتاژ و جریان عنصر مورد بررسی به صورت کلی زیر باشند:



شکل (۵-۷): عنصر مورد بررسی در یک مدار با تحریک سینوسی

$$v(t) = \sqrt{2}V_{rms} \cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\vec{V} e^{j\omega t} \right] \quad (۲۲-۷)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I_{rms} \cos(\omega t + \beta) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\vec{I} e^{j\omega t} \right] \quad (۲۳-۷)$$

که در این روابط، $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ و $\vec{I} = I_{rms} \angle \beta$ می‌باشد. حال می‌خواهیم روابط بین فازور \vec{V} و فازور \vec{I} را برای عناصر مختلف مقاومت، سلف و خازن بیان نماییم.

۱-۳-۷- روابط فازوری عنصر مقاومت

در صورتی که عنصر مورد بررسی، یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان باشد، آنگاه ارتباط بین ولتاژ و جریان در حوزه زمان برای این مقاومت به صورت زیر خواهد بود:

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (۲۴-۷)$$

حال اگر جریان سینوسی ارائه شده در رابطه (۲۳-۷) را در معادله (۲۴-۷) جایگزینی کنیم خواهیم داشت:

$$v(t) = R \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re} \left[\vec{I} e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re} \left[R \vec{I} e^{j\omega t} \right] \quad (۲۵-۷)$$

لازم به ذکر است که اگر یک مقدار ثابت R در یک عدد مختلط ضرب شود، آن مقدار، هم در قسمت حقیقی و هم در قسمت موهومی آن عدد ضرب می‌شود. پس ضریب R را می‌توان در داخل کروشه وارد نمود. حال با مقایسه رابطه (۲۵-۷) با معادله (۲۳-۷) در می‌باییم که برای معادل بودن، باید رابطه زیر برقرار باشد:

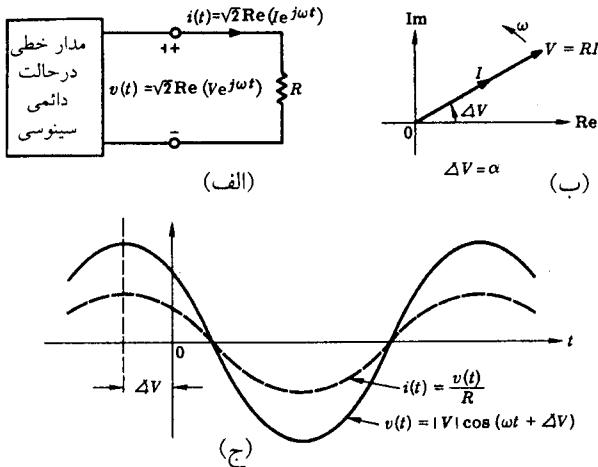
$$\vec{V} = R \vec{I} \quad , \quad \vec{I} = \frac{1}{R} \vec{V} \quad (۲۶-۷)$$

به عبارت دیگر،

$$V_{rms} = RI_{rms} \quad (۲۷-۷)$$

$$\angle \beta = \angle \alpha \quad (۲۸-۷)$$

این موارد را می‌توان در شکل (۶-۷) مشاهده نمود. با توجه به تساوی زوایای فازور ولتاژ و جریان، در می‌باییم که فازورهای ولتاژ و جریان در یک راستا بوده و فقط اندازه آنان با هم متفاوت می‌باشد که ارتباط اندازه بردارها با رابطه (۲۷-۷) مشخص می‌شود. پس در نهایت می‌توان گفت که رابطه ولتاژ و جریان یک مقاومت در شکل فازوری آن، مشابه رابطه میان ولتاژ و جریان در حوزه زمان است. به عبارت دیگر می‌توان گفت که شکل موج ولتاژ و جریان، هم فاز هستند و دامنه ولتاژ و جریان، متناسب با مقدار مقاومت می‌باشد.



شکل (۷-۶): روابط ولتاژ و جریان برای مقاومت در مدار با تحریک سینوسی؛ (الف) مدار الکتریکی؛ (ب) نمودار فازوری؛ (ج) نمودار زمانی

مثال (۵-۷): در صورتی که ولتاژ دو سر یک مقاومت 4Ω برابر $8\cos(100t - 50^\circ)$ باشد آنگاه جریان عبوری از مقاومت را بیابید.

حل: برای محاسبه جریان در حوزه زمان داریم:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{8\cos(100t - 50^\circ)}{4} = 2\cos(100t - 50^\circ)$$

حال اگر بخواهیم از روش فازوری حل کنیم، با توجه به آنکه فازور ولتاژ برابر

$$\vec{V} = \frac{8}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ$$

$$\vec{I} = \frac{1}{R} \vec{V} = \frac{\frac{8}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ$$

در نتیجه، $i(t)$ را می‌توان با استفاده از فازور آن به صورت زیر نوشت:

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(100t - 50^\circ) = 2\cos(100t - 50^\circ)$$

۷-۳-۲- روابط فازوری عنصر سلف

رابطه بین ولتاژ و جریان در حوزه زمان برای یک سلف به صورت زیر است:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (۲۹-۷)$$

حال رابطه (۲۳-۷) را در رابطه اخیر جایگزین می‌کنیم:

$$v(t) = L \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{2} \operatorname{Re} [\vec{I} e^{j\omega t}] \right\} \quad (۳۰-۷)$$

با توجه به خطی بودن عملگرهای d/dt و Re می‌توان این دو عملگر را با هم جابجا نمود. لذا با مشتق‌گیری از جمله داخل کروشه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[L \vec{I} \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) \right] \\ v(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} [j\omega L \vec{I} e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (۳۱-۷)$$

حال با مقایسه رابطه (۳۱-۷) و رابطه (۲۲-۷) به این نتیجه می‌رسیم که،

$$\vec{V} = j\omega L \vec{I} \quad , \quad \vec{I} = \frac{1}{j\omega L} \vec{V} \quad (۳۲-۷)$$

این رابطه اخیر را می‌توان به صورت اندازه و زاویه هم نشان داد. یعنی،

$$V_{rms} = (\omega L) I_{rms} \quad (۳۳-۷)$$

$$\angle \vec{V} = 90^\circ + \angle \vec{I} \quad (۳۴-۷)$$

لذا نتیجه می‌گیریم که اندازه فازور ولتاژ دو سر سلف، به مقدار ωL برابر اندازه فازور جریان سلف است ولی زاویه فازور ولتاژ، 90° درجه بیشتر از زاویه فازور جریان است (یا شکل موج جریان سلف، 90° درجه نسبت به شکل موج ولتاژ آن، پس فاز است). به عبارت دیگر، شکل موج جریان به میزان $\frac{1}{\omega L}$ سیکل از شکل موج ولتاژ دو سر آن عقب‌تر است. این موارد را می‌توان در شکل (۷-۷) مشاهده نمود.

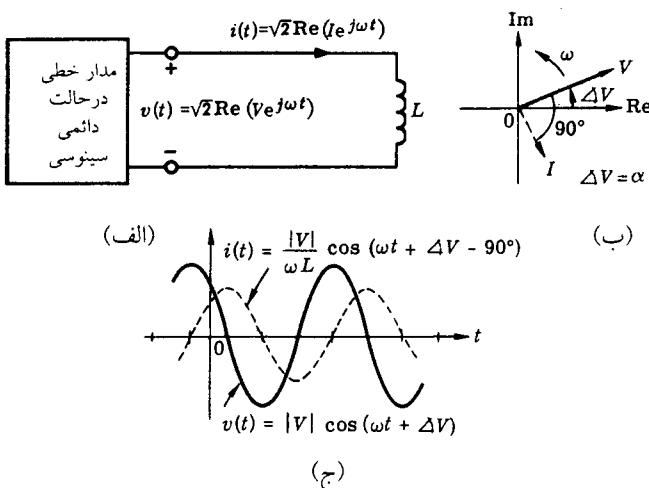
مثال (۶-۷): در صورتی که فازور ولتاژ دو سر یک سلف، برابر $V = 50^\circ - 50^\circ$ باشد و به یک سلف $4H$ اعمال گردد، و فرکانس زاویه‌ای هم $\omega = 100 \text{ rad/sec}$ باشد، موج جریان عبوری از سلف را بیابید.

حل: فازور جریان عبوری از سلف را می‌توان از رابطه (۳۲-۷) به دست آورد:

$$\vec{I} = \frac{1}{j\omega L} \vec{V} = \frac{1}{j100 \times 4} 50^\circ - 50^\circ = 0.02 \angle -140^\circ$$

حال اگر بخواهیم جریان سلف را در حوزه زمان بنویسیم، خواهیم داشت:

$$i(t) = \sqrt{2} \times 0.02 \cos(100t - 140^\circ)$$



شکل (۷-۷): روابط ولتاژ و جریان برای سلف در مدار با تحریک سینوسی؛ (الف) مدار الکتریکی؛ (ب) نمودار فازوری؛ (ج) نمودار زمانی

۳-۳-۷- روابط فازوری عنصر خازن

رابطه بین ولتاژ و جریان یک عنصر خازن خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر است:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (35-7)$$

با استفاده از نمایش فازوری i و v با توجه به روابط (۲۲-۷) و (۲۳-۷) در نهایت نتیجه می‌گیریم که،

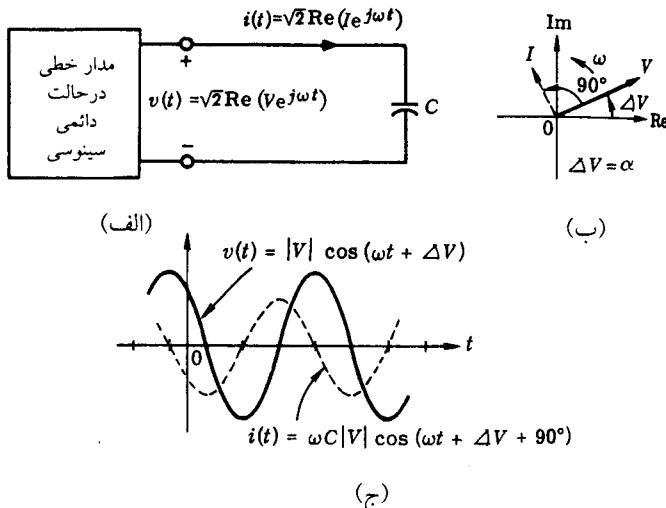
$$\vec{I} = j\omega C \vec{V} \quad , \quad \vec{V} = \frac{1}{j\omega C} \vec{I} \quad (36-7)$$

یعنی،

$$I_{rms} = \omega C \cdot V_{rms} \quad (37-7)$$

$$\angle \vec{V} = 90^\circ + \angle \vec{I} \quad (38-7)$$

این روابط نشان می‌دهد که زاویه فازور جریان، 90° درجه از زاویه فازور ولتاژ، جلوتر است؛ به عبارت دیگر، شکل موج جریان سینوسی 90° جلوتر (پیش‌فازی) از شکل موج ولتاژ سینوسی دو سر خازن است. به عبارت دیگر، شکل موج جریان خازن، 90° درجه نسبت به شکل موج ولتاژ آن، پیش‌فاز است؛ که زاویه 90° درجه به معنای $\frac{1}{4}$ سیکل می‌باشد. این مشخصات و خصوصیات را می‌توان در شکل (۸-۷) مشاهده نمود.



شکل (۸-۷): روابط ولتاژ و جریان برای خازن در مدار با تحریک سینوسی؛ (الف) مدار الکتریکی؛ (ب) نمودار فازوری؛ (ج) نمودار زمانی

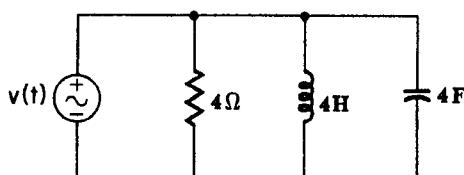
مثال (۸-۷): در صورتی که فازور ولتاژ $V = 8\angle -50^\circ$ به دو سر یک خازن با ظرفیت $4F$ اعمال گردد، آنگاه جریان عبوری از خازن را در سرعت زاویه‌ای $\omega = 100 \text{ rad/sec}$ بیابید.
حل: از رابطه (۷-۳۶) خواهیم داشت

$$\vec{I} = j\omega C \vec{V} = j100 \times 4 \times 8\angle -50^\circ = 3200\angle 40^\circ$$

لازم به ذکر است که $1\angle 90^\circ = j$ است. در نتیجه، جریان خازن در حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = \sqrt{2} \times 3200 \cos(\omega t + 40^\circ)$$

تمرین (۲-۷): مدار RLC موازی ارائه شده در شکل (۹-۷)، اگر منبع ولتاژ سینوسی به صورت $v(t) = \sqrt{2} \times 8 \cos(100t - 50^\circ)$ باشد، آنگاه جریان‌های عبوری از مقاومت، سلف و خازن را بیابید.



شکل (۹-۷): مدار RLC موازی مربوط به تمرین (۲-۷)

$$i_R(t) = \sqrt{2} \times 20 \cos(10\omega t - 5^\circ)$$

$$i_L(t) = \sqrt{2} \times 0.02 \cos(10\omega t - 140^\circ)$$

$$i_C(t) = \sqrt{2} \times 320 \cos(10\omega t + 40^\circ)$$

۴-۷-۱- تعریف مفاهیم امپدانس و ادمیتانس

۴-۷-۲- تعریف امپدانس

برای تعریف مفاهیم امپدانس یک مدار الکتریکی، یک شبکه یکقطبی را با عناصر خطی تغییرنایذیر با زمان مطابق شکل (۱۰-۷-الف) در نظر بگیرید. فرض کنید که منبع جریان سینوسی به صورت زیر به شبکه متصل شده باشد:

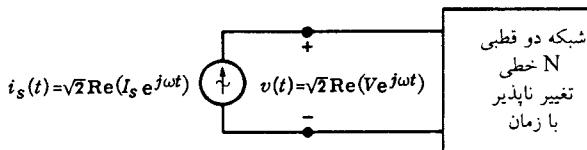
$$i_s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\vec{I}_s e^{j\omega t}] = \sqrt{2} I_s \cos(\omega t + \beta) \quad (۳۹-۷)$$

حال با توجه به آنکه پاسخ ولتاژ با تحریک سینوسی به شکل زیر باشد،

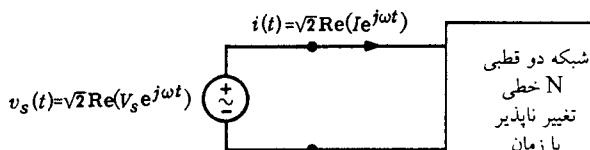
$$v(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\vec{V} e^{j\omega t}] = \sqrt{2} V_{rms} \cos(\omega t + \alpha) \quad (۴۰-۷)$$

آنگاه امپدانس نقطه تحریک شبکه N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{Z}(j\omega) \triangleq \frac{\vec{V}}{\vec{I}_s} \quad (۴۱-۷)$$



(الف)



(ب)

شکل (۱۰-۷): شبکه دو قطبی متصل به: (الف) یک منبع جریان سینوسی؛ (ب) یک منبع ولتاژ سینوسی

یعنی فازور امپدانس به معنای نسبت فازور ولتاژ دو سر مدار (\vec{V}) به فازور جریان منبع ورودی (\vec{I}_s) است و ω هم سرعت زاویه‌ای منبع جریان ورودی است. به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت که نسبت فازور ولتاژ هر دو نقطه از یک مدار به جریان ورودی آن دو سر، برابر با امپدانس دیده شده از آن دو سر می‌باشد. لذا از رابطه (۴۱-۷) در می‌باییم که،

$$|\vec{Z}(j\omega)| = \frac{V_{rms}}{I_s} , \quad \angle \vec{Z}(j\omega) = \alpha - \beta \quad (42-7)$$

اکنون با توجه به تعریف فازور امپدانس، ولتاژ ارائه شده در رابطه (۴۰-۷) را می‌توان با استفاده از رابطه (۴۱-۷) به صورت زیر تغییر داد:

$$\vec{V} = \vec{Z}(j\omega) \vec{I}_s \\ v(t) = \sqrt{2} |\vec{Z}(j\omega)| I_s \cos(\omega t + \angle \vec{Z}(j\omega) + \angle \beta) \quad (43-7)$$

پس براساس تعریف (۴۱-۷)، امپدانس مقاومت، سلف و خازن، با توجه به روابط (۲۶-۷)، (۳۲-۷) و (۳۶-۷) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{Z}_R(j\omega) = \frac{\vec{V}_R}{\vec{I}_s} = R \quad (44-7)$$

$$\vec{Z}_L(j\omega) = \frac{\vec{V}_L}{\vec{I}_s} = j\omega L \quad (45-7)$$

$$\vec{Z}_C(j\omega) = \frac{\vec{V}_C}{\vec{I}_s} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (46-7)$$

این امپدانس‌ها، کمیت‌های مختلطی هستند که بعد آن هم، بر حسب اهم می‌باشد. البته لازم به ذکر است که کاربرد اصطلاح فازور برای امپدانس، فقط به معنای بردار امپدانس است و به این معنی نیست که فازور $\vec{Z}(j\omega)$ را می‌توان در حوزه زمان هم نوشت. به عبارت دیگر، معنای فازور امپدانس، فقط بیانگر شکل برداری امپدانس است.

حال با توجه به آنکه ω در یک مدار سینوسی، مقدار ثابتی است، لذا مقدار ωL در یک سلف را به عنوان راکتانس القایی^۱ بیان نموده و با X_L نشان می‌دهیم. همچنین برای یک خازن، مقدار $-j\frac{1}{\omega C}$ را به عنوان راکتانس خازنی نام نهاده و با X_C نمایش می‌دهیم. لذا روابط (۴۵-۷) و (۴۶-۷) به شکل زیر تغییر می‌کنند:

$$\vec{Z}_L = j\omega L = jX_L = \vec{X}_L \quad (47-7)$$

$$\vec{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C = \vec{X}_C \quad (48-7)$$

^۱- Reactance

همچنین قوانین مربوط به مدارهای سری و موازی برای این امپدانس‌ها نیز همانند قوانین برای مقاومت‌ها در مدارهای با متابع ثابت می‌باشند. تنها تفاوتی که وجود دارد آن است که در محاسبات با امپدانس‌های سلفی و خازنی، باید از اعداد مختلط استفاده شود که دانشجویان می‌بایست با مطالعه مربوط به آن، که در ضمیمه (الف) هم ارائه شده است، آشنا باشند. بدین منظور اگر مداری از سری شدن عناصر مقاومتی، سلفی یا خازنی تشکیل شده باشد، آنگاه امپدانس \bar{Z} به صورت یک عدد مختلط خواهد بود که مداری قسمت‌های حقیقی^۱ و موهومی^۲ است. قسمت حقیقی آن متناظر با کل مقاومت اهمی در مدار (R) بوده و قسمت موهومی آن هم بیانگر میزان راکتانس (القاوی یا خازنی) موجود در مدار است.

یعنی،

$$\bar{Z} = R + jX \quad (49-7)$$

که

$$R = \text{Re}[\bar{Z}] \quad , \quad X = \text{Im}[\bar{Z}]$$

۴-۴-۷- تعریف ادمیتانس

اکنون به تعریف ادمیتانس نقطه تحريك در یک شبکه تک قطبی می‌پردازیم. بدین منظور، مطابق شکل (۱۰-۷-ب) یک منبع ولتاژ سینوسی مطابق رابطه (۴۰-۷) به دو سر شبکه اعمال می‌کنیم. سپس با پاسخ جریانی به تحريك ولتاژ سینوسی، ادمیتانس نقطه تحريك را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{Y}(j\omega) \triangleq \frac{\bar{I}}{\bar{V}_s} \quad (50-7)$$

یعنی ادمیتانس به معنای نسبت فازور جریان خروجی (\bar{I}) به فازور ولتاژ منبع ورودی (\bar{V}_s) می‌باشد و ω هم سرعت زاویه‌ای منبع ولتاژ ورودی است. به عبارت دیگر، نسبت فازور جریان ورودی هر نقطه از یک مدار به ولتاژ دو سر آن را ادمیتانس دو سر مدار از دید دو سر موردنظر تعریف می‌کنیم. لذا از رابطه اخیر در می‌یابیم که،

$$|\bar{Y}(j\omega)| = \frac{I_{rms}}{V_s} \quad , \quad \angle \bar{Y}(j\omega) = \beta - \alpha \quad (51-7)$$

که β زاویه فازور جریان و α زاویه فازور ولتاژ است. از طرف دیگر با مقایسه شکل‌های (۱۰-۷-الف) و (۱۰-۷-ب) در می‌یابیم که اگر فازور ولتاژ \bar{V} در شکل (ب) با فازور

^۱- Real Part

^۲- Imaginary Part

ولتاژ \vec{V} در شکل (الف) مساوی باشد، آنگاه می‌توان گفت که فازور جریان \vec{I}_s در شکل (الف) با فازور جریان \vec{I} در شکل (ب) یکسان است. در نتیجه، روابط (۴۱-۷) و (۴۷-۷) به شکل زیر اصلاح می‌شوند:

$$\vec{Z}(j\omega) = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} \quad (52-7)$$

$$\vec{Y}(j\omega) = \frac{\vec{I}}{\vec{V}} \quad (53-7)$$

از مقایسه این دو رابطه اخیر در می‌یابیم که،

$$\vec{Y}(j\omega) = \frac{1}{\vec{Z}(j\omega)} \quad , \quad \vec{Z}(j\omega) = \frac{1}{\vec{Y}(j\omega)} \quad (54-7)$$

و بالطبع،

$$|\vec{Z}(j\omega)| = \frac{1}{|\vec{Y}(j\omega)|} \quad , \quad \angle \vec{Z}(j\omega) = -\angle \vec{Y}(j\omega)$$

در نهایت، برای عناصر مقاومت، سلف، و خازن، ادمیتانس هر یک را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\vec{Y}_R(j\omega) = \frac{1}{R} = G \quad (55-7)$$

$$\vec{Y}_L(j\omega) = \frac{1}{\vec{Z}_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -j Y_L \quad (56-7)$$

$$\vec{Y}_C(j\omega) = j\omega C = jY_C \quad (57-7)$$

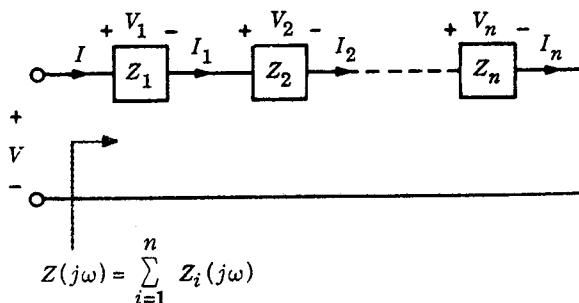
که سه رابطه اخیر، دقیقاً عکس روابط (۴۴-۷) تا (۴۶-۷) می‌باشد. در این روابط، G معرف کندوکتانس، و Y_L سوپیتانس سلفی و Y_C سوپیتانس خازنی می‌باشد.

۴-۳-۳- سری و موازی امپدانس‌ها و ادمیتانس‌ها

حال اگر در یک مداری مطابق شکل (۱۱-۷) امپدانس‌هایی با هم سری گردند، می‌خواهیم بینیم امپدانس معادل، چه مقدار خواهد بود. شرط موردنظر در این مدار آن است که مدار در حالت دائمی سینوسی و در فرکانس داده شده ω باشد. به عبارت دیگر، متغیرهای ولتاژ خازن‌ها و جریان‌های سلف‌ها دارای مقادیر اولیه نباشند و منابع مدار هم به شکل سینوسی با یک سرعت زاویه‌ای یکسان ω باشند. حال با استفاده از قوانین KCL و KVL می‌توان نوشت:

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_2 = \dots = \vec{I}_n \quad (58-7)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n = 0 \quad (59-7)$$



شکل (۱۱-۷): امپدانس‌های سری در یک مدار حالت دائمی سینوسی

و با توجه به آنکه $\vec{V}_i = \vec{Z}_i \cdot \vec{I}_i$ می‌باشد لذا با جایگزینی در رابطه (۵۹-۷) و استفاده از رابطه (۵۸-۷) به این نتیجه می‌رسیم که،

$$Z(j\omega) = Z_1(j\omega) + \dots + Z_n(j\omega) = \sum_{i=1}^n Z_i(j\omega) \quad (60-7)$$

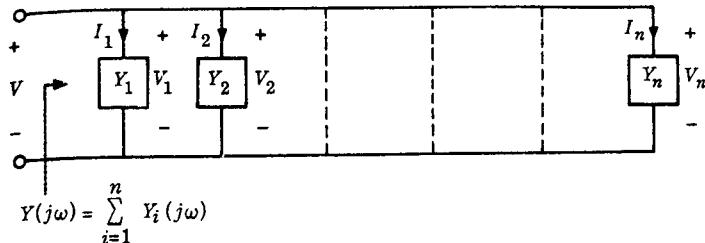
اکنون فرض کنید که عناصری با ادمیتانس‌های $(Y_1(j\omega), Y_2(j\omega), \dots, Y_n(j\omega))$ به طور موازی با یکدیگر قرار گرفته باشند که در شکل (۱۲-۷) مشخص شده است. حال با کاربرد قوانین KCL و KVL می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \dots = \vec{V}_n \quad (61-7)$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_n \quad (62-7)$$

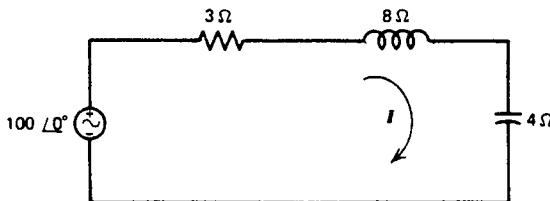
با در نظر گرفتن اینکه $\vec{I}_i = \vec{Y}_i \cdot \vec{V}_i$ می‌باشد، لذا با جایگزینی در رابطه (۶۲-۷) و استفاده از رابطه (۴۱-۷) خواهیم داشت:

$$Y(j\omega) = Y_1(j\omega) + \dots + Y_n(j\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(j\omega) \quad (63-7)$$



شکل (۱۲-۷): ادمیتانس‌های موازی در یک مدار حالت دائمی سینوسی

مثال (۸-۷): یک منبع ولتاژ سینوسی با مقدار مؤثر 100 V مطابق شکل (۱۳-۷) با یک مقاومت 3Ω ، یک سلف با راکتانس القابی 8Ω و یک خازن با راکتانس خازنی 4Ω سری شده است. در این مدار با فرض $\omega = ۳۱۴ \text{ rad/sec}$ ، جریان مدار را در حالت دائمی سینوسی بباید. همچنین ولتاژ دو سر هر عنصر را بدست آورید.



شکل (۱۳-۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۸-۷)

حل: با توجه به شکل (۱۳-۷)، امپدانس سه عنصر شبکه برابر است با:

$$\vec{Z}_R = R = 3\Omega$$

$$\vec{Z}_L = jX_L = j8\Omega$$

$$\vec{Z}_C = -jX_C = -j4\Omega$$

حال با توجه به سری بودن این عناصر می‌توان نوشت:

$$\vec{Z} = \vec{Z}_R + \vec{Z}_L + \vec{Z}_C = 3 + j8 - j4 = 3 + j4$$

با توجه به آنکه مقدار مؤثر منبع ولتاژ سینوسی برابر 100 V می‌باشد، لذا فازور منبع ولتاژ را برابر $100∠0^\circ$ در نظر می‌گیریم. انتخاب زاویه صفر برای فازور منبع ولتاژ به این معنی است که زاویه فازور ولتاژ منبع را به عنوان نقطه مبدأ (یا مرجع فازور) در نظر گرفته‌ایم. اکنون فازور جریان مدار را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{\vec{Z}} = \frac{100∠0}{3 + j4} = \frac{100∠0}{5∠-53^\circ} = 20∠-53^\circ \text{ A}$$

پس جریان مدار در حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = \sqrt{2} \times 20 \cos(314t - 53^\circ)$$

در مرحله دوم، فازور ولتاژ را در دو سر هر عنصر می‌باییم.

$$\vec{V}_R = R\vec{I} = 3 \times 20∠-53^\circ = 60∠-53^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_L = jX_L\vec{I} = j8(20∠-53^\circ) = 16∠36^\circ \text{ V}$$

$$\vec{V}_C = -jX_C\vec{I} = -j4(20∠-53^\circ) = 8∠-143^\circ \text{ V}$$

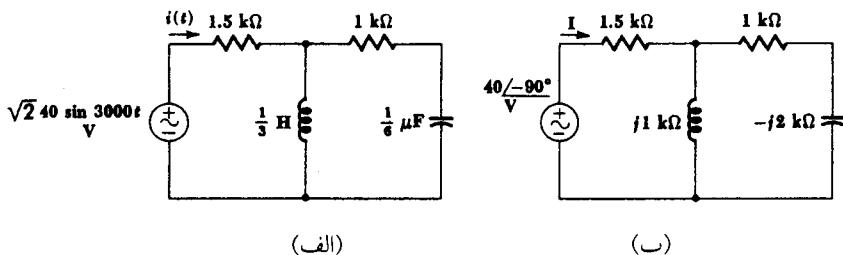
در نتیجه، این ولتاژها در حوزه زمان برابرند با:

$$v_R(t) = \sqrt{2} \times 60 \cos(314t - 53^\circ)$$

$$v_L(t) = \sqrt{2} \times 16 \cos(314t + 36^\circ)$$

$$v_C(t) = \sqrt{2} \times 8 \cos(314t - 143^\circ)$$

مثال (۹-۷): یک مدار RLC در حوزه زمان در شکل (۹-۷-الف) نشان داده شده است. با استفاده از یافتن امپدانس معادل دو سر منع، جریان $i(t)$ را بیابید.



شکل (۹-۷): یک مدار RLC: (الف) در حوزه زمان؛ (ب) در سیستم فازور با $\omega = 3000 \text{ rad/sec}$

حل: با توجه به آنکه $\omega = 3000 \text{ rad/sec}$ است، پس مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۹-۷-الف) را می‌توان به سیستم فازور مطابق با شکل (۹-۷-ب) انتحال داد. در این حالت، امپدانس عنصر سلف مدار، برابر $j\omega L = j1000 \Omega$ و امپدانس عنصر خازن برابر $\frac{1}{j\omega C} = -j2000 \Omega$ می‌باشد. حال امپدانس معادل را از دو سر منع ولتاژ محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{Z}_{eq} = 1/5 + \frac{j/(1-j2)}{j1+1-j2} = 2 + j1/5 = 2/5 \angle 36^\circ \text{ k}\Omega$$

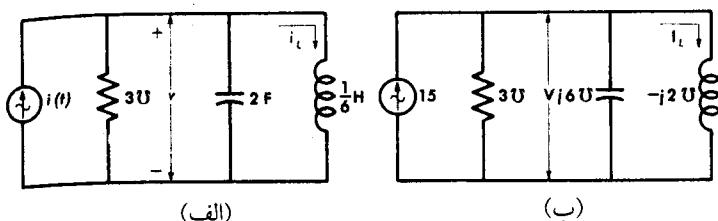
در نتیجه، فازور جریان منع برابر است با:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_s}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2/5 \angle 36^\circ} = 16 \angle -126^\circ \text{ mA}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$i(t) = \sqrt{2} \times 16 \cos(3000t - 126^\circ) \text{ mA}$$

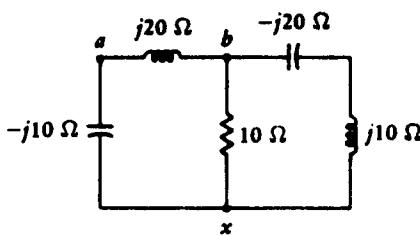
تمرین (۳-۷): مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۷)، یک مدار RLC موازی را نشان می‌دهد که به یک منع جریان با مقدار $= \sqrt{2} \times 15 \cos 3t = i(t)$ متصل شده است. در این مدار الکتریکی، مطلوبست: (الف) ادمیتانس دیده از دو سر منع جریان؛ (ب) فازور ولتاژ دو سر همه عناصر؛ (ج) فازور جریان‌های هر یک از عناصر مقاومت، سلف و خازن.



شکل (۱۵-۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۱۳-۷)؛ (الف) در حوزه زمان؛ (ب) در سیستم فازور

$$\text{جواب: (الف)} \quad \vec{I}_R = 9\angle -53^\circ / 13 \quad \vec{V} = 3 + j4 \quad Y = 3 + j4 \quad \Omega \\ \text{ج) } \vec{I}_L = 6\angle -143^\circ / 13 \quad \vec{I}_C = 18\angle 36^\circ / 87$$

تمرین (۴-۷): امپدانس ورودی را که از سرهای $a-x$ و $b-x$ در مدار شکل (۱۶-۷) می‌توان دید، محاسبه کنید.



شکل (۱۶-۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۴-۷)

$$\text{جواب: } \vec{Z}_{b-x} = 10 + j20 \quad , \quad \vec{Z}_{a-x} = 10 - j20$$

۵-۷- تجزیه و تحلیل گره و حلقه در حالت دائمی سینوسی

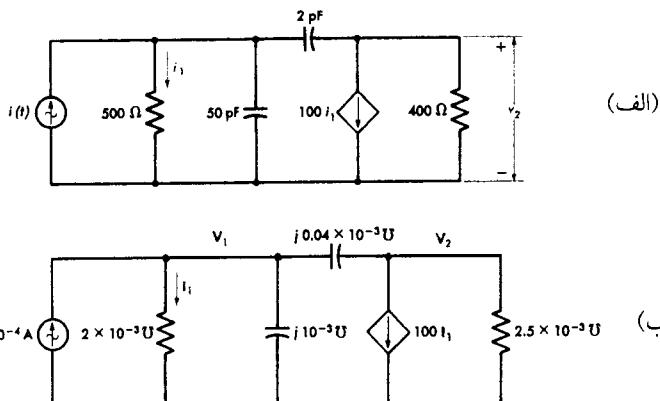
در فصول اولیه، روش‌های تحلیل گره، حلقه، جمع‌آثار، و مدار معادل تونن را برای مدارهای مقاومتی بیان نمودیم. حال می‌خواهیم همین روش‌ها را برای مدارهای در حالت دائمی سینوسی بیان نماییم. دوباره فرض می‌کنیم که پاسخ مدار، فقط برای حالت صفر انجام می‌شود، بعلاوه آنکه منابع ورودی هم باید به صورت توابع سینوسی با سرعت‌های زاویه‌ای یکسان باشند. همچنین منظور از حالت دائمی سینوسی آن است که مدت زمان زیادی باید از زمان وصل مدار بگذرد تا شرایط اولیه در مدار (ناشی از ولتاژهای اولیه خازن‌ها و جریان‌های اولیه سلف‌ها) از بین رفته و میرا گردند تا در نهایت، فقط اثر منابع سینوسی متناوب را در مدار داشته باشیم.

۷-۵-۱- تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی

در ابتدا به طور مختصر به روش تحلیل گره در مدارهای مقاومتی می‌پردازیم. دیدیم که اگر یک مدار مقاومتی دارای N گره باشد، آنگاه یک گره را به عنوان گره مبنا انتخاب نموده و معادلات KCL را برای $N-1$ گره دیگر می‌نویسیم. سپس با حل این $N-1$ معادله (بدون وجود منابع وابسته) ولتاژ گره‌ها محاسبه می‌شوند. حال اگر منابع وابسته هم در مدار باشند، معادلات این منابع هم به جمع $N-1$ معادله گره‌ها اضافه می‌شوند.

حال آیا روند مذکور برای مدارهای با منابع سینوسی و با استفاده از متغیرهای فازوری صادق خواهد بود؟ در دو بخش قبلی اثبات کردیم که قوانین KVL و KCL در حوزه فازوری و با متغیرهای فازوری هم صادق هستند. همچنین رابطه $v(t) = R \cdot i(t)$ در مدارهای مقاومتی به شکل $\bar{v} = \bar{Z} \cdot \bar{i}$ در می‌آید که از نظر مفهومی مشابه هم می‌باشد. به همین دلیل می‌توانیم با استفاده از روش‌های حل گره، مدارهای با منابع سینوسی را به صورت حالت دائمی سینوسی تحلیل نماییم. این موضوع را می‌توان به روش‌های روش تحلیل مش، جمع آثار و مدار معادل تونن و دیگر روش‌ها نیز گسترش داد.

مثال (۱۰-۷): مدار الکتریکی در شکل (۱۷-۷-الف)، یک مدار تقویت کننده الکترونیکی است که در حوزه زمان رسم شده است. در صورتی که جریان منبع ورودی به صورت $i_1(t) = \sqrt{2} \times 10^{-4} \cos(2\pi t)$ باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی $v_2(t)$ را بیابید.



شکل (۱۷-۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱۰-۷): (الف) حوزه زمان؛ (ب) حوزه فرکانس

حل: با توجه به آنکه سرعت زاویه‌ای منبع جریان ورودی، برابر $\omega = 2 \times 10^7 \text{ rad/sec}$ است، لذا مدار ارائه شده در شکل (۱۷-۷-الف) را به حوزه فرکانس برده و عناصر را بر حسب ادمیتانس‌های آنها بیان می‌کنیم که در شکل (۱۷-۷-ب) نشان داده شده است. حال فازور ولتاژ دو گره ۱ و ۲ را برابر \bar{V}_1 و \bar{V}_2 در نظر می‌گیریم. سپس معادلات KCL را برای این دو گره به صورت زیر می‌نویسیم. همچنین چون یک منبع وابسته نیز وجود دارد، معادله این منبع نیز به دو معادله KCL اضافه می‌شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 10^{-3} \bar{V}_1 + j \times 10^{-3} \bar{V}_2 + j \cdot 0.4 \times 10^{-3} (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) - 10^{-4} = 0 \\ 1.0 \bar{I}_1 + 2 / 5 \times 10^{-3} \bar{V}_2 + j \cdot 0.4 \times 10^{-3} (\bar{V}_2 - \bar{V}_1) = 0 \\ \bar{I}_1 = 2 \times 10^{-3} \bar{V}_1 \end{array} \right.$$

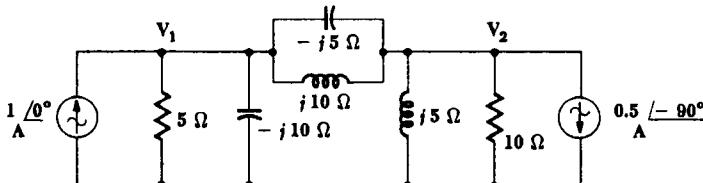
اکنون از سه معادله اخیر، متغیرهای \bar{I}_1 و \bar{V}_1 را حذف می‌کنیم که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\bar{V}_2 = 1/\sqrt{2} \angle -245^\circ \text{ V}$$

که تابع زمانی متناظر با آن برابر است با:

$$v_2(t) = \sqrt{2} \times 1/\sqrt{2} \cos(2 \times 10^7 t - 245^\circ)$$

تمرین (۵-۷): برای مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل (۱۸-۷) و با استفاده از تحلیل گره، ولتاژهای دو گره را بباید.



شکل (۱۸-۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۵-۷)

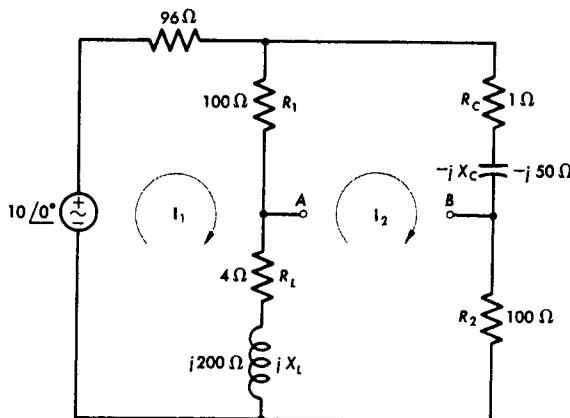
$$\text{جواب: } v_2(t) = \sqrt{2} \times 4 / \sqrt{2} \cos(\omega t + 116^\circ), \quad v_1(t) = \sqrt{2} \times 2 / \sqrt{2} \cos(\omega t - 63^\circ)$$

۷-۵-۲- تحلیل حلقه در حالت دائمی سینوسی

تحلیل حلقه در مدارهای مقاومتی بر این پایه استوار بود که پس از تعیین حلقه‌های اساسی مدار، جریان‌هایی برای آن حلقه انتخاب می‌نمودیم. سپس براساس قانون KVL، معادلات مربوطه را برای این حلقه‌ها می‌نوشتیم. با حل معادلات حلقه قادر بودیم تا

جريان‌های هر حلقه را تعیین نمایم که با استفاده از این جریان‌های حلقه، دیگر مشخصات الکتریکی مدار نیز قابل محاسبه بود. حال همین روال را می‌توانیم برای مدارهای الکتریکی در حالت دائمی سینوسی انجام دهیم. بدین منظور، ابتدا اندوکتانس‌ها و کاپاسیتنس‌های مدار را به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم؛ به عبارت دیگر به جای L ، راکتانس القایی jX_L و به جای C ، راکتانس خازنی $-jX_C$ قرار می‌دهیم. همچنین منابع سینوسی را بر حسب فازورهای آنان بیان می‌کنیم. در نتیجه، تمام متغیرهای ولتاژی و جریانی در چنین مداری، بر حسب فازور بیان شده اند. بعلاوه اگر مدار مذکور دارای منابع وابسته نیز باشد، معادلات این منابع به جمع معادلات حلقه افزوده می‌شوند. پس از حل معادلات و تعیین فازور جریان‌های حلقه، می‌توان معادلات زمانی این جریان‌ها را نوشت. این روند را در مثال (۱۱-۷) شاهد خواهیم بود.

مثال (۱۱-۷): برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۹-۷) و با استفاده از روش تحلیل حلقه، ولتاژ \vec{V}_{AB} را بیابید.



شکل (۱۹-۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱۱-۷)

حل: ابتدا با توجه به اینکه مدار مذکور دارای دو حلقه است، لذا معادلات KVL را برای این دو حلقه می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} -(10 + 4 + j200)(\vec{I}_1 - \vec{I}_2) + (100 + 4 + j200)(\vec{I}_2 - \vec{I}_1) &= 0 \\ (1 - j50 + 100)(\vec{I}_2 - \vec{I}_1) + (100 + 4 + j200)(\vec{I}_2 - \vec{I}_1) &= 0 \end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق خواهیم داشت:

$$\vec{I}_1 = 5 / 0.53 \times 10^{-2} \angle -0.736^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_2 = 4 / 484 \times 10^{-2} \angle 25.6^\circ \text{ A}$$

حال با تشکیل یک حلقه، ولتاژ \bar{V}_{AB} را محاسبه می‌کنیم.

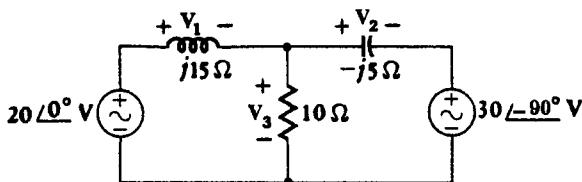
$$\bar{V}_{AB} + 100\bar{I}_2 + (4 + j20)(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) = 0$$

با معلوم بودن \bar{I}_1 و \bar{I}_2 ، \bar{V}_{AB} برابر می‌شود با:

$$\bar{V}_{AB} = 0$$

لازم به ذکر است که مدار مذکور، یک نوع پل AC است و رفتاری شبیه پل وتسون دارد؛ زیرا به ازای \bar{V}_{AB} ، پل به طور متداول در آمده و روش مفیدی را برای تعیین دقیق بسیاری از پارامترها از راه این آزمایش ارائه می‌دهد.

تمرین (۶-۷): برای مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲۰-۷)، ولتاژهای \bar{V}_1 ، \bar{V}_2 و \bar{V}_3 را با استفاده از روش حل حلقه تعیین نمایید. لازم به ذکر است که فرکانس هر دو منبع با هم برابر می‌باشند.



شکل (۲۰-۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۶-۷)

$$\bar{V}_3 = 36/9\angle 81/9^\circ \text{ V}, \quad \bar{V}_1 = 15/62\angle -13/32^\circ \text{ V}, \quad \bar{V}_2 = 33/9\angle 65/7^\circ \text{ V}$$

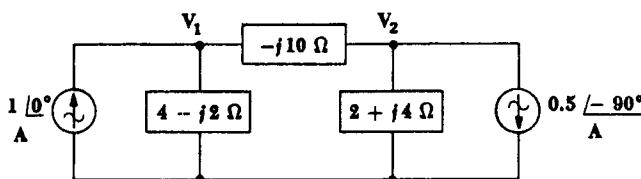
۶-۷- تجزیه و تحلیل جمع آثار در حالت دائمی سینوسی

با توجه به آنکه در این کتاب، در مورد عناصر با مشخصات خطی تغییرناپذیر با زمان بحث می‌کنیم، لذا خاصیت جمع آثار را برای یافتن پاسخ موردنظر به ازای منابع ورودی مختلف در فصول ابتدایی برای مدارهای الکتریکی مطرح نمودیم. حال اگر در مداری، منابع ورودی نابسته به صورت منابع سینوسی باشند، آنگاه باز هم می‌توانیم تحلیل مدارها را به روش جمع آثار و براساس کاربرد فازورها ارائه نماییم. البته مزیت بسیار مهمی که تجزیه و تحلیل مدارهای با تحریک سینوسی براساس روش جمع آثار نسبت به روش‌های تحلیل گره و حلقه دارد، این است که امکان وجود منابع ورودی با فرکانس‌های مختلف نیز وجود دارد. علت این موضوع آن است که در روش جمع آثار در حالت دائمی سینوسی، فقط یک منبع در هر تحلیل، مورد توجه است. پس می‌توان شبکه را در حوزه فرکانس بر حسب

فرکانس منبع موردنظر تعیین نمود. اما در روش تحلیل حلقه و گره، باید تمام منابع سینوسی با یک فرکانس می‌بودند.

مثال (۱۲-۷): مدار ارائه شده در شکل (۱۸-۷) مفروض است. با استفاده از خاصیت جمع آثار، ولتاژهای (t) v_1 و v_2 را بایابید.

حل: در مدار مذکور ابتدا به ساده سازی مدار می‌پردازیم. این کار با موازی کردن جفت امپدانس‌ها صورت می‌گیرد. امپدانس‌های مقاومت 5Ω و خازن 10H - با هم موازی هستند که حاصل آن $2\Omega - j4$ می‌شود. همچنین امپدانس‌های خازن 5Ω - و سلف 2Ω - با هم موازی هستند که حاصل آن، $1\Omega + j2$ می‌گردد. نهایتاً امپدانس‌های مقاومت 1Ω و سلف $j2\Omega$ با هم موازی می‌باشند که منتجه آن، $0.5\text{H} - j90^\circ$ می‌شود. این مدار ساده شده در شکل (۲۱-۷) دوباره رسم شده است.



شکل (۲۱-۷): مدار الکتریکی ساده شده مربوط به مثال (۱۲-۷)

برای بدست آوردن ولتاژ \bar{V}_1 ، ابتدا اثر منبع جریان سمت چپ را در نظر می‌گیریم که با زیرنویس L مشخص شده و منبع جریان سمت راست را قطع (مدار باز) می‌کنیم. لذا داریم:

$$\vec{V}_{1L} = (1 \angle 0^\circ) \frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} = \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2$$

در مرحله دوم، اثر منبع جریان سمت راست را محاسبه می‌کنیم که با زیرنویس R مشخص می‌کنیم. در این حالت، منبع جریان سمت چپ را قطع (مدار باز) می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{V}_{1R} = (-0.5 \angle -90^\circ) \left(\frac{(2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} \right) (4 - j2) = \frac{-6 + j8}{6 - j8} = -1$$

حال دو جواب بدست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا \bar{V}_1 حاصل گردد. یعنی،

$$\bar{V}_1 = \vec{V}_{1L} + \vec{V}_{1R} = 2 - j2 - 1 = 1 - j2 = 2/24 \angle -63^\circ 40^\circ \text{ V}$$

اگر همین روال را برای ولتاژ \bar{V}_2 تکرار کنیم خواهیم داشت:

$$\bar{V}_2 = 4/47 \angle 116^\circ 6^\circ \text{ V}$$

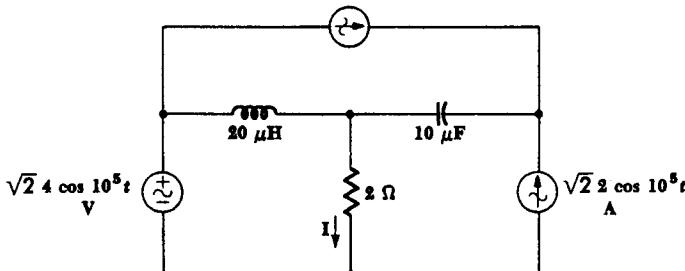
در نهایت با انتقال به حوزه زمان، جواب‌های زیر حاصل می‌شود:

$$v_1(t) = \sqrt{2} \times 2 / 24 \cos(\omega t - 63^\circ / 4)$$

$$v_7(t) = \sqrt{2} \times 4 / 47 \cos(\omega t + 116^\circ / 6)$$

تمرین (۷-۷): مدار الکتریکی شکل (۲۲-۷) را در نظر بگیرید. با استفاده از اصل جمع آثار، جریان \bar{I} و $i(t)$ (مربوط به فازور \bar{I}) را باید.

$$\sqrt{2} 2 \cos(10^5 t - 45^\circ) A$$



شکل (۲۲-۷): مدار الکتریکی مرتبه به تمرین (۷-۷)

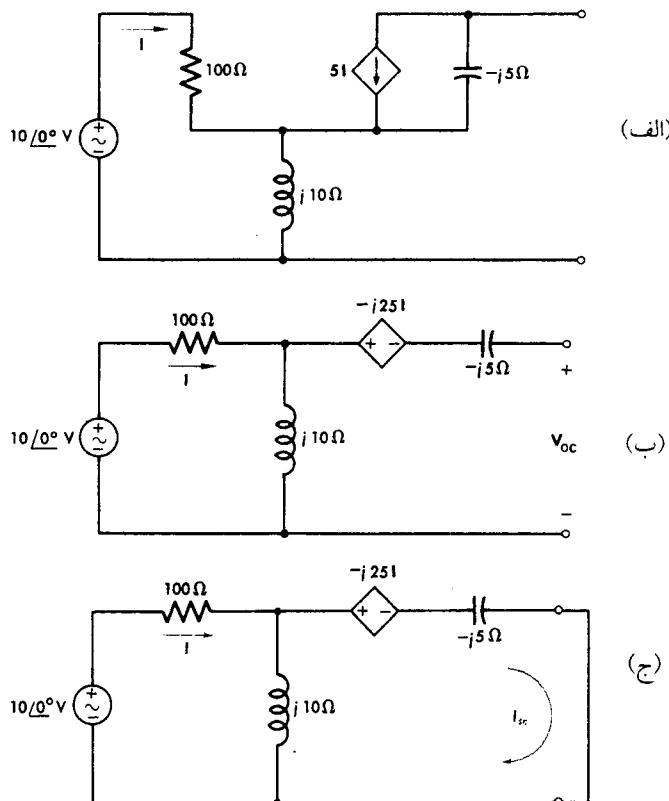
$$i(t) = 2 / 41 \sqrt{2} \cos(1.^\circ 5 t), \quad \bar{I} = (1 - j) + (\sqrt{2}) + (1 + j) = 2 + \sqrt{2}$$

۷-۷-تجزیه و تحلیل مدار با استفاده از مدار معادل تونن

همان‌گونه که در تحلیل مدارها در بخش‌های قبلی اشاره نمودیم، روش تحلیل مدارها و نوشتن معادلات ولتاژ و جریان در مدارهای DC و AC (تجزیه با منابع سینوسی) یکسان می‌باشد و تنها تفاوتی که دارد، آن است که در مدارهای با تحریک سینوسی، از نمایش فازوری متغیرها و عناصر شبکه استفاده می‌شود. این روند به قضیه مدار معادل تونن هم قابل گسترش است و با استفاده از دو آزمایش مدار باز و اتصال کوتاه، می‌توان مدار معادل تونن مدارهای با تحریک سینوسی را محاسبه نمود. با آزمایش مدار باز می‌توان \vec{V}_{oc} را تعیین نمود که همان ولتاژ منبع مدار معادل تونن است. با آزمایش اتصال کوتاه هم جریان \bar{I}_{sc} محاسبه می‌شود که با استفاده از آن، امپدانس مدار معادل تونن را می‌توان به صورت زیر تعیین نمود:

$$\vec{Z}_{eq} = \frac{\vec{V}_{oc}}{\bar{I}_{sc}} \quad (۶۴-۷)$$

مثال (۲۳-۷): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲۳-۷-الف) مفروض است. مدار معادل توان شبکه را از دو سر خروجی آن بیابید.



شکل (۲۳-۷): (الف) مدار الکتریکی مربوط به مثال (۲۳-۷)؛ (ب) مدار برای محاسبه ولتاژ مدار باز؛ (ج) مدار برای محاسبه جریان اتصال کوتاه

حل: برای تعیین ولتاژ مدار باز \bar{V}_{oc} ، ابتدا شکل (۲۳-۷-الف) را به شکل (۲۳-۷-ب) تبدیل می‌کنیم. برای تعیین \bar{V}_{oc} ، ابتدا معادله KVL را در حلقه سمت چپ می‌نویسیم:

$$-10 + 100\bar{I} + j10\bar{I} = 0$$

$$\bar{I} = \frac{10}{100 + j10} = \frac{1}{10 + j1}$$

سپس با نوشتن معادله KVL در حلقه سمت راست خواهیم داشت:

$$\bar{V}_{oc} = -(-j25\bar{I}) + j10\bar{I} = j35\bar{I} = 3/48 \angle 84/2^\circ V$$

حال برای محاسبه جریان اتصال کوتاه \vec{I}_{sc} از مدار ارائه شده در شکل (۲۳-۷) استفاده می‌شود. لذا در این مدار با نوشتن دو معادله KVL برای دو حلقه مدار خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -10\angle + j10\vec{I} + j1(\vec{I} - \vec{I}_{sc}) = 0 \\ -j25 - j5(\vec{I}_{sc}) + j1(\vec{I}_{sc} - \vec{I}) = 0 \end{cases}$$

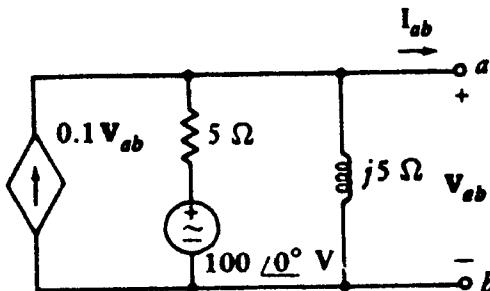
با حذف جریان \vec{I} از دسته معادلات اخیر، جریان \vec{I}_{sc} به مقدار زیر محاسبه می‌گردد:

$$\vec{I}_{sc} = 0.6 \angle 31^\circ \text{ A}$$

در نتیجه، امپدانس مدار معادل تونن برابر خواهد بود با:

$$\vec{Z}_{eq} = \frac{\vec{V}_{oc}}{\vec{I}_{sc}} = \frac{3/48 \angle 84/3}{0.6 \angle 31} = 5/8 \angle 53/3^\circ \Omega$$

تمرین (۸-۷): مدار معادل تونن مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲۴-۷) را بیابید.



شکل (۲۴-۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۸-۷)

$$\vec{Z}_{eq} = 2 + j4 \Omega, \quad \vec{V}_{oc} = 89/4 \angle 63/4 \text{ V}$$

۷-۸- توان در مدارهای با تحریک سینوسی

یک شبکه یک قطبی N را در نظر بگیرید که از عناصر خطی تغییرنایذیر با زمان تشکیل شده باشد. این شبکه به یک مولد متصل شده است که تحت ولتاژ $v(t)$ ، جریان $i(t)$ را دریافت می‌کند. اگر این جریان و ولتاژ به صورت زیر باشد:

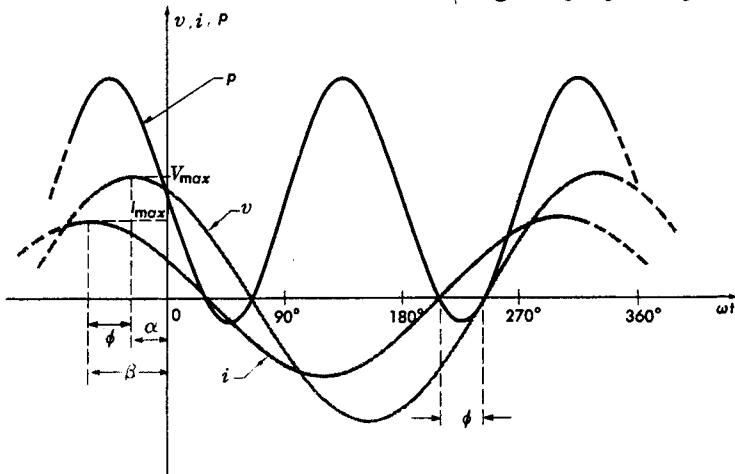
$$v(t) = \sqrt{2} V_{rms} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I_{rms} \cos(\omega t + \beta)$$

آنگاه توان لحظه‌ای از حاصل ضرب این ولتاژ و جریان حاصل می‌شود. یعنی،

$$p(t) = v(t)i(t) = V_{rms} I_{rms} \cos(\alpha - \beta) + V_{rms} I_{rms} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \quad (85-7)$$

منحنی های $i(t)$ ، $v(t)$ و $p(t)$ در شکل (۲۵-۷) نشان داده شده است. در زمانی که $p(t) > 0$ است به این معنی است که جهت توان لحظه ای از مولد به سمت شبکه است و اگر $p(t) < 0$ گردد، آنگاه جهت انتقال توان لحظه ای از شبکه به سمت مولد است. حال می خواهیم بدانیم متوسط این توان لحظه ای چقدر است؟ برای این منظور، توان متوسط P_{av} را به صورت زیر تعریف می کنیم:



شکل (۲۵-۷): شکل موج های $(p(t))$ ، $i(t)$ و $v(t)$

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

اما جمله دوم در رابطه (۶۵-۷) به خاطر جمله کسینوسی آن، دارای مقدار متوسط صفر است؛ زیرا به صورت یک تابع نوسانی با مقدار متوسط صفر است. لذا،

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos(\alpha - \beta) = V_{rms} I_{rms} \cos\phi \quad (66-7)$$

به این توان متوسط، توان حقیقی (اکتیو) می گویند که بر حسب وات (W) اندازه گیری می شود.

مقدار زاویه $\beta - \alpha$ را زاویه ضریب قدرت می نامیم و با ϕ نشان می دهیم. همچنین به $\cos\phi$ هم ضریب قدرت^۱ شبکه می گویند. حال اگر در شبکه ای $\beta > \alpha > \phi$ باشد (یعنی زاویه فازور ولتاژ، جلوتر از زاویه فازور جریان باشد) آنگاه $0 < \phi < \beta - \alpha$ خواهد بود که در این حالت، ضریب قدرت را از نوع پس فازی^۲ می گویند. مفهوم پس فاز بودن به این معنی است که زاویه فازور جریان از زاویه فازور ولتاژ، عقب تر است (ملاک مقایسه براساس زاویه فازور

^۱- Power Factor

^۲- Lag

ولتاز است). همچنین اگر در شبکه‌ای $\beta < \alpha$ باشد به این معنی است که زاویه فازور جریان، جلوتر از زاویه فازور ولتاز می‌باشد ($o < \phi$). در این حالت، ضریب قدرت را از نوع پیش‌فازی^۱ می‌گویند؛ یعنی زاویه فازور جریان نسبت به زاویه فازور ولتاز، پیش‌فاز (جلوتر) است.

۱-۸-۷- توان در یک بار اهمی با تحریک سینوسی

در بخش (۱-۳-۷) روابط فازوری را برای یک عنصر مقاومت بیان کردیم. دیدیم که اگر فازور ولتاز دو سر بار اهمی به صورت $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ باشد، آنگاه فازور جریان عبوری از آن به مقدار $\vec{I} = I_{rms} \angle \alpha$ خواهد بود؛ یعنی زاویه فازور ولتاز و جریان در بار اهمی با هم برابر است. پس توان حقیقی در یک مقاومت برابر است با:

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos(\alpha - \beta) = V_{rms} I_{rms} = RI_{rms}^2 \quad (۶۷-۷)$$

به عبارت دیگر، در یک بار اهمی، زاویه ضریب قدرت، برابر صفر است ($o = \phi$) و ضریب قدرت هم برابر واحد می‌باشد ($\cos\phi = 1$).

۲-۸-۷- توان در یک بار سلفی خالص با تحریک سینوسی

در بخش (۲-۳-۷) روابط فازوری را برای یک عنصر سلف بیان نمودیم. حال فرض کنید که ولتاز اعمالی به یک سلف تابع سینوسی است که فازور آن، برابر $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ باشد. با توجه به آنکه اپدانس یک سلف به مقدار jX_L است لذا جریان عبوری از سلف برابر است با:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}}{jX_L} = \frac{V_{rms}}{X_L} \angle \alpha - ۹۰^\circ \quad (۶۸-۷)$$

در نتیجه، زاویه ضریب قدرت که از تفاضل زاویه فازور ولتاز و جریان حاصل می‌شود، به مقدار زیر است:

$$\phi = \alpha - \beta = \alpha - (\alpha - ۹۰^\circ) = ۹۰^\circ$$

و ضریب قدرت برابر $\cos\phi = 0$ می‌گردد. پس نتیجه می‌گیریم که توان حقیقی در یک سلف، به مقدار صفر است. به عبارت دیگر، سلف هیچ توان مفیدی از شبکه دریافت نمی‌کند. اما برای درک بهتر توان لحظه‌ای منتقل شده، توان موهومی (راکتیو) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

^۱- Lead

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin \phi \quad (۷۰-۷)$$

که Q میزان توان موهومی است و برحسب ولت آمپر راکتیو (VAR) سنجیده می‌شود. براساس این تعریف، توان موهومی یک سلف برابر است با:

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin 90^\circ = V_{rms} I_{rms} = (X_L I_{rms}) I_{rms} = X_L I_{rms}^2 \quad (۷۰-۸)$$

این توان موهومی، مقدار متوسط توانی است که در $\frac{1}{4}$ سیکل، بین منبع و شبکه رد و بدل می‌شود. به عبارت دیگر، این مقدار توان موهومی در $\frac{1}{4}$ سیکل از سمت منبع به سمت شبکه، و در $\frac{1}{4}$ بعدی سیکل، از سمت شبکه به سمت منبع در جریان خواهد بود (یا به عبارت دیگر، بار سلفی خالص، هیچ انرژی را مصرف نمی‌کند؛ بلکه در $\frac{1}{4}$ سیکل، آن را ذخیره و در $\frac{1}{4}$ بعدی، آن را پس می‌دهد). این منحنی‌ها را می‌توان در شکل (۷-۷) نیز مشاهده نمود.

۷-۳-۸-۷- توان در یک بار خازنی خالص با تحریک سینوسی

روابط فازوری برای یک عنصر خازن را در بخش (۳-۳-۷) بحث کردیم. فرض کنید که ولتاژ اعمالی به یک خازن به صورت یک تابع سینوسی است که فازور آن برابر $\tilde{V} = V_{rms} \angle \alpha$ باشد، آنگاه با توجه به آنکه امپدانس یک خازن به مقدار jX_C است، لذا جریان عبوری از خازن برابر است با:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{-jX_C} = \frac{V_{rms}}{X_C} \angle \alpha + 90^\circ \quad (۷۱-۷)$$

در نتیجه، زاویه ضریب قدرت برای یک خازن به مقدار زیر خواهد بود:

$$\phi = \alpha - \beta = \alpha - (\alpha + 90^\circ) = -90^\circ$$

البته $\cos \phi = 0$ می‌گردد. همانگونه که قبلًا هم بیان نمودیم برای تفاوت میان ضریب قدرت صفر برای سلف و خازن از اصطلاح پس‌فاز و پیش‌فاز استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر، برای سلف، عبارت پس‌فاز را به کار می‌بریم؛ زیرا زاویه جریان، 90° درجه از زاویه ولتاژ، عقب‌تر (پس‌فاز) است و برای خازن، کلمه پیش‌فاز را به کار می‌بریم؛ زیرا زاویه جریان، 90° درجه از زاویه ولتاژ، جلو‌تر است.

حال با توجه به آنکه ضریب قدرت خازن هم برابر صفر است، پس می‌توان گفت که توان حقیقی یک خازن، برابر صفر می‌باشد. به عبارت دیگر، یک خازن، مشابه یک سلف، هیچ توان مفیدی از شبکه دریافت نمی‌کند. اما میزان توان موهومی (راکتیو) یک خازن برابر مقدار زیر است:

$$\begin{aligned} Q &= V_{rms} I_{rms} \sin(-\alpha) = -V_{rms} I_{rms} = \\ &= (-X_C I_{rms}) I_{rms} = -X_C I_{rms}^2 = -\frac{V_{rms}^2}{X_C} \end{aligned} \quad (72-7)$$

علامت منفی در توان موهومی خازن به این معنی است که در $\frac{1}{C}$ سیکلی که سلف از شبکه، توان موهومی جذب می‌کند، یک خازن، به شبکه، توان می‌دهد و بر عکس در $\frac{1}{C}$ بعدی سیکل که توان از سلف به شبکه منتقل می‌شود، در خازن، توان از شبکه به خازن منتقل می‌گردد. این منحنی‌ها در شکل (۸-۷) قابل مشاهده می‌باشند. از این خاصیت خازن‌ها در اصلاح ضریب توان شبکه‌ها استفاده می‌شود.

۴-۸-۷- ارتباط توان‌های حقیقی، موهومی و ظاهری

توان دیگری که می‌توان برای وسایل مصرفی تعریف نمود، توان ظاهری است. این توان ظاهری از حاصل ضرب ولتاژ مؤثر در جریان مؤثر به دست می‌آید. این توان ظاهری را با عملگر S نشان می‌دهیم که،

$$S = V_{rms} I_{rms} \quad (73-7)$$

با مقایسه روابط توان حقیقی (معادله ۷-۶۹)، توان موهومی (معادله ۷-۶۹) و توان ظاهری ارائه شده در معادله اخیر به رابطه‌ای میان این سه معادله پی می‌بریم که،

$$P = S \cdot \cos \phi \quad (74-7)$$

$$Q = S \cdot \sin \phi \quad (75-7)$$

و در نتیجه،

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (76-7)$$

این ارتباط بین P و Q و S را می‌توان از طریق رابطه فازوری نیز بیان نمود. بدین منظور توان مختلط \vec{S} را به شکل زیر تعریف می‌کیم:

$$\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^* \quad (77-7)$$

که اندازه فازور \vec{S} از حاصل ضرب V_{rms} و I_{rms} به دست می‌آید و زاویه فازور \vec{S} نیز از اختلاف زاویه فازور ولتاژ و جریان محاسبه می‌شود. این موضوع را می‌توان از طریق دیگری نیز بیان نمود. با فرض آنکه $\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$ و $\vec{I} = I_{rms} \angle \beta$ باشد و با توجه به آنکه مزدوج بودن یک بردار، باعث منفی شدن زاویه آن می‌گردد، لذا رابطه (۷۷-۷) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\vec{S} = (V_{rms} \angle \alpha)(I_{rms} \angle \beta)^* = V_{rms} I_{rms} \angle \alpha - \beta = V_{rms} I_{rms} \angle \phi$$

حال با نوشتن رابطه اخیر به شکل دکارتی آن خواهیم داشت:

$$\vec{S} = V_{rms} I_{rms} \cos \phi + j V_{rms} I_{rms} \sin \phi$$

با توجه به تعاریفی که برای توان حقیقی P و توان موهومی Q بیان نمودیم آنگاه می‌توان گفت که رابطه اخیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{S} = P + jQ \quad (78-7)$$

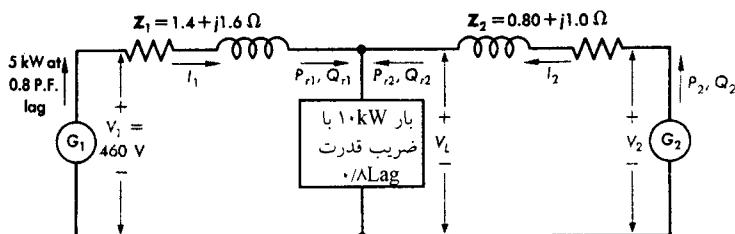
به عبارت دیگر، توان حقیقی P ، قسمت حقیقی از فازور توان ظاهری \vec{S} ، و توان موهومی Q ، قسمت موهومی از فازور توان ظاهری \vec{S} می‌باشد. از این روابط نیز در می‌یابیم که،

$$Q = P \cdot \tan \phi = S \cdot \sin \phi \quad (79-7)$$

$$P = Q \cdot \cot \phi = S \cdot \cos \phi \quad (80-7)$$

حال با استفاده از روابطی که بین توان حقیقی، موهومی و ظاهری با یکدیگر وجود دارد و همچنین روابطی که بین این توان‌ها و مشخصات ولتاژ و جریان هر یک از عناصر وجود دارد می‌توان بسیاری از مدارهای الکتریکی را با معلوم بودن مشخصات توان آنان حل نمود.

مثال (۱۴-۷): شکل (۲۶-۷) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، دو مولد G_1 و G_2 (به عنوان دو منبع ولتاژ) یک بار را تغذیه می‌کنند. در شرایطی از مدار که بار موردنظر، توان 10 kW را در ضریب قدرت $1/8$ پس فاز دریافت می‌کند، منبع G_1 با ولتاژ دو سر مؤثر 460 V ، توان 5 kW را در ضریب قدرت $1/8$ پس فاز تولید می‌کند. در این شرایط، ولتاژ \tilde{V}_L و نیز توان حقیقی و موهومی تولیدی منبع G_2 را بیابیم.



شکل (۲۶-۷): سیستم الکتریکی مربوط به مثال (۱۴-۷)

حل: در ابتدا با توجه به اینکه در منبع G_1 ، ولتاژ و توان حقیقی (اکتیو) آن مشخص است، پس جریان تولیدی توسط این منبع را از رابطه (۷۶-۷) تعیین می‌کنیم.

$$I_1 = \frac{P_1}{V_1 \cos \phi_1} = \frac{5000}{460 \times 0.8} = 13.6\text{ A}$$

اما با توجه به آنکه ضریب قدرت منبع به صورت پس فاز است، پس اگر زاویه ولتاژ منبع را صفر اختیار کنیم (یعنی $\angle \vec{V} = 46^\circ$) آنگاه با توجه به آنکه در ضریب قدرت پس فاز، $\phi > 0$ است، لذا زاویه جریان منبع برابر است با:

$$\beta = \alpha - \phi = +\cos^{-1} 0 / \lambda = -36^\circ / 87$$

در نتیجه،

$$\vec{I}_1 = 13/6 \angle -36^\circ / 87 \text{ A}$$

حال با استفاده از قانون KVL، فازور ولتاژ دو سر بار به مقدار زیر خواهد بود:
 $\vec{V}_L = \vec{V}_1 - \vec{Z}_1 \vec{I}_1 = 46^\circ \angle (1/4 + j1/6)(13/6 \angle -36^\circ / 87) = 431/76 \angle -0^\circ / 79^\circ \text{ V}$

اکنون نوبت به بار می‌رسد تا جریان مصرفی آن را تعیین کنیم. مشابه حالت قبل، جریان بار برابر است با:

$$I_L = \frac{P_L}{V_L \cos \phi_L} = \frac{1000}{431/76 \times 0 / \lambda} = 28/95 \text{ A}$$

علاوه، با توجه به آنکه ضریب قدرت بار نیز به صورت پس فازی است پس $\phi_L > 0$ است (لازم به ذکر است که ϕ اختلاف زاویه فازور ولتاژ و جریان دو سر بار است). در نتیجه، زاویه جریان \vec{I}_L که با β_L نشان می‌دهیم برابر خواهد بود با:

$$\beta_L = \alpha_L - \phi_L = -0/79 - \cos^{-1} 0 / \lambda = -37/66^\circ$$

که α_L زاویه فازور ولتاژ \vec{V}_L است. در نهایت، فازور جریان \vec{I}_L برابر رابطه زیر می‌شود:

$$\vec{I}_L = I_L \angle \phi_L = 28/95 \angle -37/66^\circ$$

اکنون با توجه به جهت جریانی که برای \vec{I}_2 ، \vec{I}_1 و \vec{I}_L در نظر گرفته شده است در می‌باییم که،

$$\vec{I}_2 = \vec{I}_L - \vec{I}_1 = 28/95 \angle -37/66^\circ - 13/6 \angle -36^\circ / 87 = 15/35 \angle -38/36^\circ$$

با توجه به محاسبه \vec{I}_2 و با استفاده از قانون KVL برای حلقه سمت راست می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 &= \vec{V}_L + \vec{Z}_2 \vec{I}_2 = 431/76 \angle -0^\circ / 79^\circ + (0 / \lambda + j1)(15/35 \angle -38/36^\circ) \\ &= 450/88 \angle -0/19^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

برای آنکه توان حقیقی و موهمی مربوط به منبع G_2 را بیاییم، باید فازورهای ولتاژ و جریان آن را داشته باشیم. لذا با محاسبه فازور \vec{V}_2 و \vec{I}_2 خواهیم داشت:

$$\tilde{\vec{S}}_2 = \vec{V}_2 \vec{I}_2^* = (450/88 \angle -0/19^\circ)(15/35 \angle 38/36^\circ)$$

$$= 6921 \angle 38/17^\circ = 5441/16 + j4277/16$$

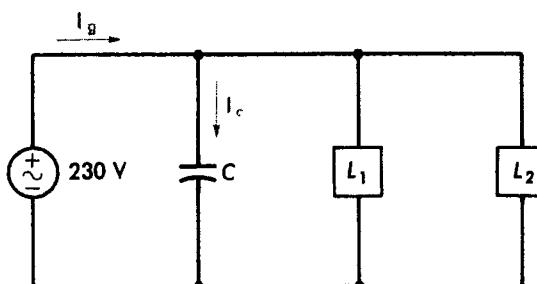
$$P_2 = 5441/16 \text{ W} , Q_2 = 4277/16 \text{ VAR}$$

همان‌گونه که در این مثال مشخص است، منابع G_1 و G_2 توان موهومی زیادی را برای تأمین توان موهومی بار تولید می‌کنند. البته درصد زیادی از این توان، توسط امپدانس‌های \bar{Z}_1 و \bar{Z}_2 مصرف می‌شوند و مابقی، به بار مربوطه منتقل می‌شود. این موضوع باعث می‌گردد که دامنه جریان‌های I_1 و I_2 نیز زیاد گردد. برای کاهش دامنه این جریان‌ها کافی است کاری کنیم که توان موهومی مورد نیاز بار، مستقیماً با وسایلی که در کنار آنان نصب می‌شوند تأمین گرددند که به این وسایل، خازن‌های الکتریکی می‌گویند. این خازن‌ها تولید کننده توان موهومی هستند و اگر مستقیماً موازی بار نصب گرددند، باعث می‌شوند که جریان مربوط به این توان موهومی بار، وارد خطوط (با امپدانس‌های \bar{Z}_1 و \bar{Z}_2) نگرددند که در نتیجه، باعث کاهش دامنه جریان‌ها و کاهش تلفات می‌شوند. بهترین طراحی برای مقدار این خازن‌ها آن است که تمام توان موهومی بار، توسط خازن‌ها تأمین شود. به عبارت دیگر، ضریب قدرت بار به مقدار واحد افزایش یابد ($\cos\phi = 1$). روش کار طراحی مقدار این خازن‌ها را در مثال زیر خواهیم دید.

مثال (۱۵-۷): یک منبع مولدی 230V ، 60Hz ، دو بار الکتریکی L_1 و L_2 را مطابق شکل (۲۷-۷) تغذیه می‌کند. بار \bar{Z}_1 توان 10kW را با ضریب قدرت 0.8 پس‌فاز و بار \bar{Z}_2 توان 10kVA را با ضریب قدرت 0.6 پس‌فاز دریافت می‌کند. برای بهبود ضریب قدرت این دو بار از یک خازن موازی با آنها استفاده می‌شود.

(الف) مقدار ظرفیت خازنی C را به‌گونه‌ای طراحی کنید که ضریب قدرت مولد، برابر یک گردد.

(ب) با وجود خازن محاسبه شده در حالت (الف)، جریان خازن را بیابید.



شکل (۲۷-۷): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱۵-۷)

حل: (الف) برای آنکه ظرفیت خازنی C را بیابیم، ابتدا باید توان موهومی مورد نیاز دو بار L_1 و L_2 را بیابیم. بدین منظور ابتدا Q_{L1} و Q_{L2} را می‌باییم.

$$P_{L1} = 10 \text{ kW}$$

$$Q_{L1} = P_{L1} \cdot \tan \phi_1 = 10 \times \tan(\cos^{-1} 0.8) = 7/5 \text{ kVAR}$$

$$P_{L2} = 10 \times 0.6 = 6 \text{ kW}$$

$$Q_{L2} = 6 \times \tan \phi_2 = 6 \tan(\cos^{-1} 0.6) = 8 \text{ kVAR}$$

در نتیجه، مجموع توان حقیقی و موهومی دو بار برابر است با:

$$P_T = 10 + 6 = 16 \text{ kW}$$

$$Q_T = 7/5 + 8 = 15/5 \text{ KVAR}$$

با توجه به آنکه می خواهیم $\cos \phi = 1$ گردد لذا توان موهومی خازن باید مساوی توان موهومی بارها باشد. یعنی،

$$Q_C = -Q_T = -15/5 \text{ kVA}$$

حال با توجه به رابطه (۷۲-۷) می توان نوشت:

$$X_C = -\frac{V_{rms}}{Q_C} = -\frac{23.0}{-15/5 \times 10^3} = 3/41 \Omega$$

در نهایت با توجه به رابطه $C = \frac{1}{\omega X_C}$ ، ظرفیت خازنی C به مقدار زیر محاسبه می شود:

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 3/41} = 7/78 \times 10^{-4} \text{ F} = 778 \mu\text{F}$$

ب) در صورتی که خازن، نصب نشده باشد آنگاه توان ظاهری کل دو بار برابر است با:

$$\vec{S}_L = 16 + j15/5 \text{ kVAR}$$

با توجه به آنکه $\angle 0^\circ = 230^\circ$ می باشند در نتیجه مجموع جریان دو بار را می توان با استفاده از رابطه (۷۷-۷) به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\vec{I}_L = \left(\frac{\vec{S}_L}{\vec{V}} \right)^* = \left(\frac{16 + j15/5}{230} \right)^* = 96/86 \times 10^{-3} \angle -44/10^\circ \text{ kA} =$$

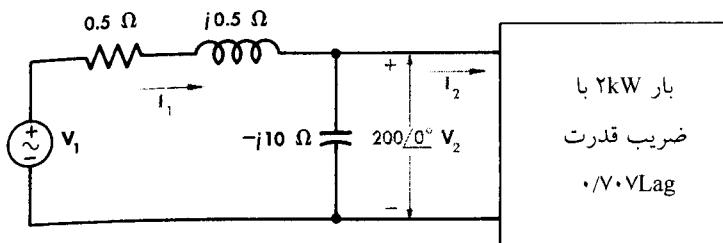
$$= 96/86 \angle -44/10^\circ \text{ A}$$

که این مقدار، مجموع جریان دو بار می باشد که باید از مولد کشیده شود. حال اگر خازن طراحی شده در قسمت (الف) در مدار قرار گیرد، آنگاه توان موهومی کشیده شده از منبع، صفر خواهد بود؛ زیرا تمام توان موهومی بار توسط خازن تولید می گردد. لذا،

$$\vec{I}_L = \left(\frac{\vec{S}_G}{\vec{V}} \right)^* = \left(\frac{16 + j0}{230} \right)^* = 0.0696 \angle 0^\circ \text{ kA} = 69/6 \text{ A}$$

دیده می شود که تصحیح ضریب قدرت، تأثیر بسیار زیادی در کاهش جریان مولد دارد.

تمرین (۹-۷): مدار ارائه شده در شکل (۲۸-۷) مفروض است. الف) فازور جریان \vec{I}_2 را بیابید؛ ب) فازور جریان \vec{I}_1 و ولتاژ منبع \vec{V} را محاسبه کنید؛ ج) توان حقیقی، موهومی و ظاهری تولید شده توسط منبع را بیابید.



شکل (۲۸-۷): مدار الکتریکی مربوط به تمرین (۹-۷)

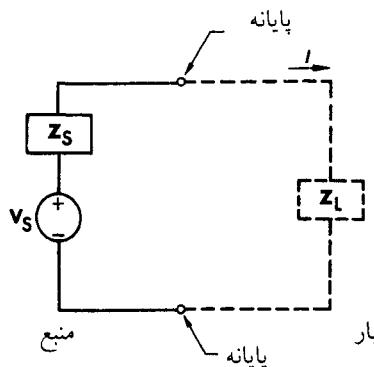
جواب: (الف) $\vec{V}_1 = 200/2\angle 24^\circ$; (ب) $\vec{I}_1 = 14/14\angle 44^\circ$; (ج) $\vec{I}_2 = 14/14\angle -45^\circ$

$$Q = -1899 \text{ VAR}, \quad P = 2099 \text{ W}, \quad S = 2831 \text{ VA}$$

۹-۷- قضیه حداکثر توان انتقالی

مطلوب بسیار مهمی که در مدارهای الکتریکی وجود دارد آن است که چگونه می‌توان مداری را طراحی کرد، به‌گونه‌ای که جداکثر توان به بار موردنظر انتقال یابد. فرض کنید که یک شبکه الکتریکی با متعلقات آن به یک بار الکتریکی با امپدانس \bar{Z}_L متصل شده باشد. حال سؤال را به این صورت مطرح می‌کنیم که میزان امپدانس بار موردنظر (یعنی \bar{Z}_L) به چه مقدار باشد تا از شبکه الکتریکی، جداکثر توان ممکن به این بار انتقال یابد؟

برای پاسخ به این سوال، ابتدا شبکه الکتریکی موردنظر را از دو سر بار \bar{Z}_L به صورت مدار معادل تونن در می‌آوریم. بعبارت دیگر، شبکه الکتریکی با یک منبع با فازور V_S و یک امپدانس Z_S به صورت مدل تونن ساده شود. این مرحله کار براساس روش بیان شده در بخش (۷-۷) می‌باشد. این مدار را می‌توان در شکل (۲۹-۷) مشاهده نمود.



شکل (۲۹-۷): مدار معادل تونن شبکه به همراه بار متصل به آن

این قضیه بیان می‌کند که برای آنکه توان حقیقی منتقل شده به بار با امپدانس \vec{Z}_L به حداکثر خود برسد باید $\vec{Z}_L = \vec{Z}_S^*$ باشد که علامت * به معنای مزدوج است. به عبارت دیگر می‌بایست امپدانس بار برابر مزدوج امپدانس کل شبکه دیده شده از سمت بار \vec{Z}_L باشد.

برای اثبات این موضوع، ابتدا باید رابطه توان حقیقی بار را محاسبه نماییم. فرض کنید که $\vec{Z}_S = R_S + jX_S$ و $\vec{Z}_L = R_L + jX_L$ باشد. با توجه به آنکه سلف بار با راکتانس القابی X_L هیچ‌گونه توان حقیقی مصرف نمی‌کند، لذا توان حقیقی بار، فقط ناشی از R_L می‌باشد. در نتیجه،

$$P_L = R_L \cdot I_{rms}^2 \quad (81-7)$$

که I_{rms} اندازه فازور جریان مدار می‌باشد. با توجه به آنکه فازور جریان مدار برابر،

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}_L}{\vec{Z}_S + \vec{Z}_L} \quad (82-7)$$

است، آنگاه اندازه فازور جریان برابر است با:

$$I_{rms} = |\vec{I}| = \frac{|V_s|}{\sqrt{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2}} \quad (83-7)$$

که در این رابطه $\vec{Z}_S + \vec{Z}_L = (R_s + R_L) + j(X_s + X_L)$ می‌باشد. حال با جایگزینی رابطه (83-7) در رابطه (81-7) خواهیم داشت:

$$P_L = |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2} \quad (84-7)$$

حال هدف موردنظر را می‌توان در حداکثر کردن رابطه (84-7) بیان نمود. در این رابطه مقادیر $|V_s|$ ، R_s و X_s مقدار ثابت و مشخصی هستند و فقط R_L و X_L متغیر هستند. با توجه به آنکه راکتانس بار می‌تواند به صورت مقادیر مثبت (خاصیت سلفی) و یا مقادیر منفی (خاصیت حازنی) باشد آنگاه برای حداکثر شدن P_L از دیدگاه X_L ، باید $X_L = -X_S$ گردد تا جمله دوم در مخرج کسر رابطه (84-7) به مقدار صفر کاهش یابد. در این حالت، رابطه (84-7) به رابطه زیر تغییر می‌یابد:

$$P_L = |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_s + R_L)^2} \quad (85-7)$$

حال برای یافتن مقدار مناسب R_L به شرط حداکثر شدن توان انتقالی P_L ، کافی است که از رابطه P_L در معادله (85-7) نسبت به متغیر R_L مشتق جزیی بگیریم. یعنی،

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = |V_s|^2 \frac{(R_s + R_L)^2 - 2(R_s + R_L)R_L}{(R_s + R_L)^4} = 0 \quad (86-7)$$

با حل معادله اخیر به این نتیجه می‌رسیم که باید $R_s = R_L$ باشد تا توان حداکثر به بار Z_L منتقل شود. همچنین با شرط قبلی که به دست آورده بودیم (یعنی $X_L = -X_S$) به این نتیجه می‌رسیم که باید،

$$\vec{Z}_L = R_L + jX_L = R_s - jX_S = \vec{Z}_s^*$$

یعنی باید امپدانس بار با مزدوج امپدانس سیستم برابر باشد. با جایگزینی این شرط در رابطه (۸۴-۷) یا (۸۵-۷)، حداکثر توان انتقالی برابر است با:

$$P_{L_{\max}} = \frac{|V_s|^2 R_L}{(R_L + R_s)^2} = \frac{|V_s|^2}{4R_L} = \frac{|V_s|^2}{4R_s}$$

همچنین جریان مدار در این شرایط به مقدار زیر خواهد بود:

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}_s}{\vec{Z}_s + \vec{Z}_L} = \frac{\vec{V}_s}{\vec{Z}_s + \vec{Z}_s^*} = \frac{\vec{V}_s}{2R_s}$$

۱۰-۷ - خلاصه و نتیجه‌گیری

هدف از ارائه مطالب این فصل، تجزیه و تحلیل مدارهای با تحریک منابع سینوسی می‌باشد. در صورتی که این مدارها در حالت صفر باشند و فقط بخواهیم تحلیل و پاسخ حالت صفر را بیابیم و منابع ورودی نیز به صورت توابع سینوسی باشند، آنگاه می‌توان از خاصیت فازور استفاده نمود. خلاصه مباحث این فصل را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

- در صورتی که یک موج سینوسی به صورت $f(t) = \sqrt{2}F_{rms} \cos(\omega t + \phi)$ باشد آنگاه فازور موج $f(t)$ را می‌توان به صورت $\vec{F} = F_{rms} \angle \phi$ نشان دارد. همچنین اگر فازوری به صورت $\vec{G} = G_{rms} \angle \alpha$ باشد و فرکانس موج هم ω باشد آنگاه $g(t) = \sqrt{2}G_{rms} \cos(\omega t + \alpha)$.

- قواعد KCL و KVL در حوزه زمان را می‌توان در حوزه فرکانس و با استفاده از

خاصیت فازور هم نشان داد. یعنی $\sum_{j=1}^m i_j(t) = 0$ و $\sum_{i=1}^n v_i(t) = 0$ را می‌توان بر حسب

خاصیت فازور به صورت $\sum_{j=1}^m \vec{i}_j = 0$ و $\sum_{i=1}^n \vec{v}_i = 0$ نشان داد. البته شرط این خواص آن

است که تمام جریان‌ها و ولتاژها از نوع توابع سینوسی با سرعت زاویه‌ای یکسان باشند.

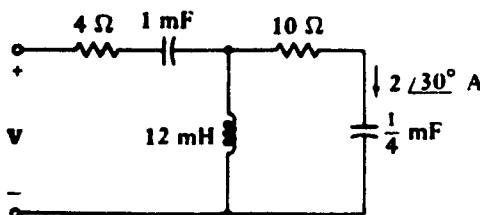
- روابط بین ولتاژ و جریان عناصر مقاومت، سلف و خازن در حوزه زمان را می‌توان با استفاده از خاصیت فازور ساده شده $\vec{V} = jX_C \cdot \vec{I}$ ، $\vec{V} = R \cdot \vec{I}$ و $\vec{V} = jX_L \cdot \vec{I}$

بیان نمود. در این روابط، R مقاومت، X_L راکتانس القایی سلف، و X_C راکتانس خازنی می‌باشد.

- در یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان، امپدانس نقطه تحریک $(j\omega)\bar{Z}$ را می‌توان از نسبت $\frac{\bar{V}}{\bar{I}_S}$ تعیین نمود که \bar{I}_S فازور یک منبع جریان بوده و \bar{V} پاسخ ولتاژ شبکه در دو سر منبع جریان است.
- ادمیتانس نقطه تحریک γ یک شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان برابر $\frac{\bar{I}}{\bar{V}_S}$ است که \bar{V}_S فازور یک منبع ولتاژ بوده و \bar{I} پاسخ جریان شبکه در دو سر منبع ولتاژ است. مشخص است که $\frac{1}{\gamma} = \bar{Z}$ می‌باشد و بر عکس.
- تحلیل مدارهای الکتریکی در حالت دائمی سینوسی با استفاده از روش گره، حلقه، جمع آثار و مدار معادل تونن براساس همان اصول ارائه شده در مدارهای مقاومتی است؛ با این تفاوت که به جای R ، C و متابع سینوسی، از فازور این عناصر استفاده می‌شود.
- در مدارهای با حالت دائمی سینوسی، می‌توان توان را به سه صورت توان ظاهری S ، توان حقیقی P و توان موهومنی Q ارزیابی نمود. ارتباط این سه توان با رابطه $\bar{S} = \bar{V}\bar{I}^*$ مشخص می‌شود که قسمت حقیقی فازور \bar{S} به معنای توان حقیقی و قسمت موهومنی فازور \bar{S} به معنای توان موهومنی است. این مقادیر توان حقیقی به صورت $P = V_{rms}I_{rms}\cos\phi$ و توان موهومنی برابر $Q = V_{rms}I_{rms}\sin\phi$ می‌باشد.
- شرط انتقال توان حداقل به یک بار با امپدانس \bar{Z}_L از یک شبکه با امپدانس تونن \bar{Z}_S آن است که امپدانس بار با مزدوج امپدانس شبکه یکسان باشد یعنی باید شرط $\bar{Z}_L = \bar{Z}_S^*$ برقرار گردد تا حداقل توان حقیقی توسط \bar{Z}_L جذب گردد.

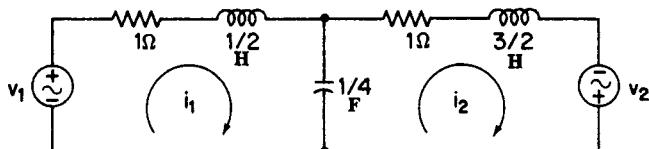
۱۱-۷- مسائل مروری

۱- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۰-۷)، با شرط $\omega = ۳۰۰۰ \text{ rad/sec}$ ، فازور ولتاژ \bar{V} و ولتاژ $\bar{U}(t)$ را بیابید.



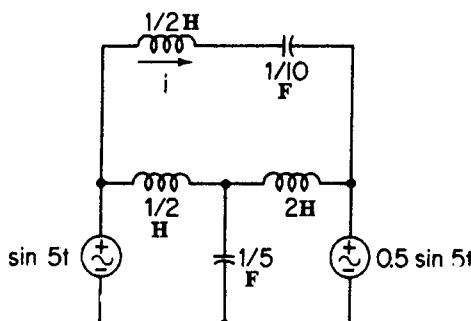
شکل (۳۰-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

- مدار ارائه شده در شکل (۳۱-۷) مفروض می‌باشد. اگر $v_1(t) = \sqrt{2} \cos 2t$ و $v_2(t) = \sqrt{2} \cos(2t - 45^\circ)$ باشد آنگاه جریانهای $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را در حالت دائمی سینوسی تعیین نمایید.



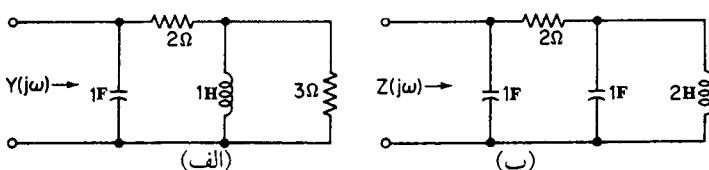
شکل (۳۱-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۲)

- مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳۲-۷) در حالت دائمی سینوسی می‌باشد. در این مدار، $i(t)$ را بیابید.



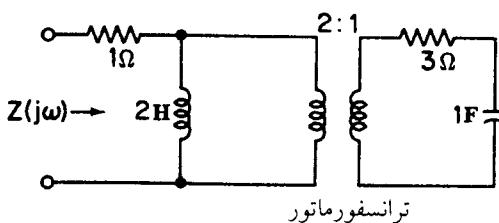
شکل (۳۲-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۳)

- برای مدارهای الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۳-۷) امپدانس $Z(j\omega)$ و ادمیتانس $Y(j\omega)$ را به طور مستقل و جداگانه حساب کنید.



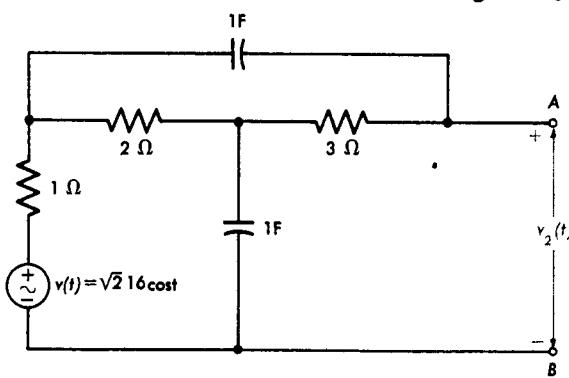
شکل (۳۳-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۴)

- در مدار الکتریکی شکل (۳۴-۷) ترانسفورماتور به صورت یک ترانسفورماتور ایده‌آل می‌باشد. در این مدار، $Z(j\omega)$ را بیابید.



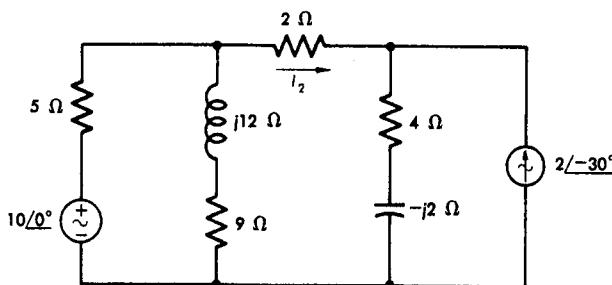
شکل (۳۴-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۵)

- ولتاژ $v_2(t)$ را در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۵-۷) به کمک تحلیل گره و تحلیل حلقه به طور مستقل و جداگانه محاسبه کنید.



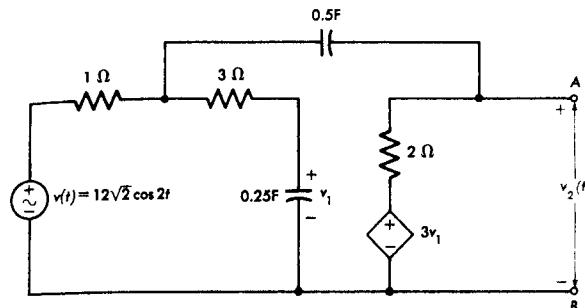
شکل (۳۵-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

- با استفاده از روش تحلیل گره، جریان \bar{I}_2 را در مدار الکتریکی شکل (۳۶-۷) تعیین نمایید. همچنین همین جریان \bar{I}_2 را از روش تحلیل حلقه نیز بدست آورید.



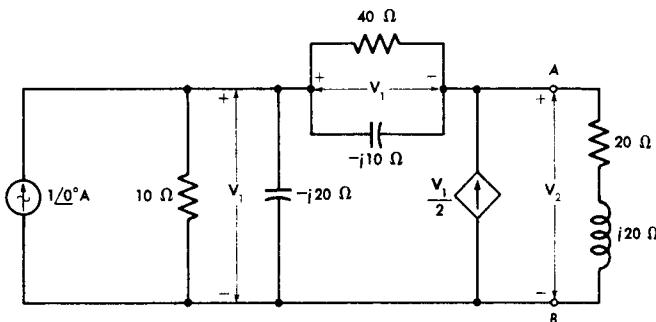
شکل (۳۶-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

- مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۷-۷) مفروض است. در ابتدا با استفاده از روش گره، ولتاژ $v_2(t)$ را در حالت دائمی سینوسی بیابید. سپس جواب خود را با استفاده از روش تحلیل حلقه دوباره بدست آورید.



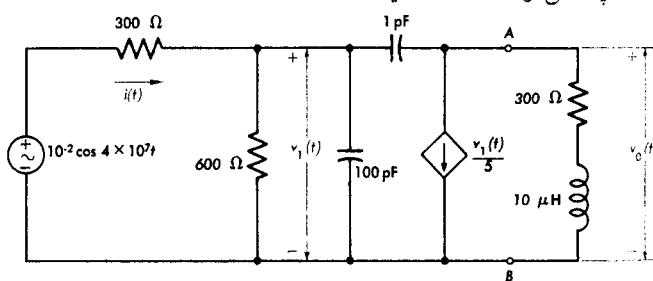
شکل (۳۷-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

-۹- مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۸-۷) در حالت دائمی سینوسی قرار دارند. ابتدا با استفاده از روش تحلیل گره و سپس با کاربرد تحلیل حلقه، فازور ولتاژ \bar{V}_2 را بدست آورید.



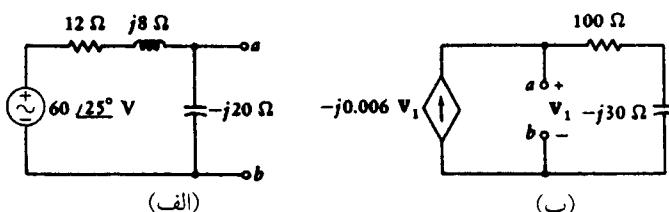
شکل (۳۸-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

-۱۰- ولتاژ v_o را در حالت دائمی سینوسی برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۹-۷) با استفاده از روش حلقه و سپس با استفاده از روش گره محاسبه نمایید. (برای سادگی محاسبات، ابتدا مقاومت ۶۰۰\Omega و راکتانس خازن ۱۰۰\mu F را با هم ترکیب کنید و به صورت یک امپدانس واحد نشان دهید).



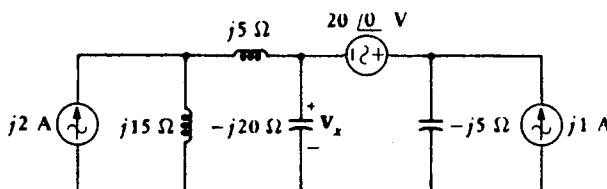
شکل (۳۹-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۰)

- ۱۱- برای مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳۵-۷)، مدار معادل تونن را از دو سر A و B به دست آورید.
- ۱۲- مدار معادل تونن را از دو سر A و B در مدار الکتریکی شکل (۳۷-۷) محاسبه کنید.
- ۱۳- از دیدگاه مقاومت 2Ω در مدار ارائه شده در شکل (۳۶-۷)، مدار معادل تونن شبکه را به دست آورید. سپس جریان در مقاومت مذکور را بباید.
- ۱۴- مدار معادل تونن از سرهای a و b را در دو شبکه ارائه شده در شکل (۴۰-۷) بباید.



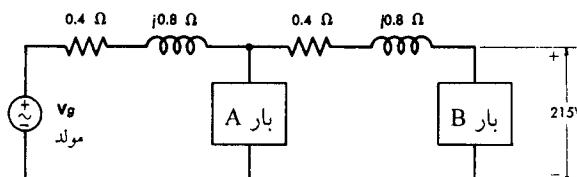
شکل (۴۰-۷): مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۱۴)

- ۱۵- با استفاده از روش جمع آثار، ولتاژ \bar{V}_x را در حالت دائمی سینوسی برای مدار ارائه شده در شکل (۴۱-۷) تعیین کنید.



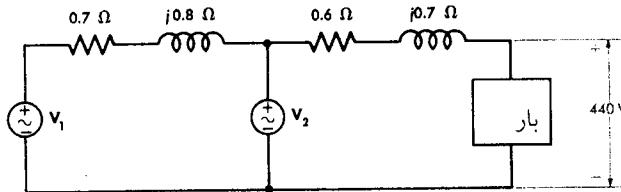
شکل (۴۱-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۵)

- ۱۶- در شکل (۴۲-۷) یک مولد V_g ، دو بار الکتریکی A و B را تغذیه می‌کند. بار A توان 8kW را در ضریب قدرت $0/8$ پیش فاز دریافت می‌کند و بار B توان 10kW را در ضریب قدرت $0/6$ پس فاز مصرف می‌کند. حال اگر ولتاژ بار B برابر 215V باشد آنگاه ولتاژ بار A یعنی \bar{V}_A و مقادیر توانهای حقیقی، موهومی و ظاهری تولیدی توسط منبع را بباید.



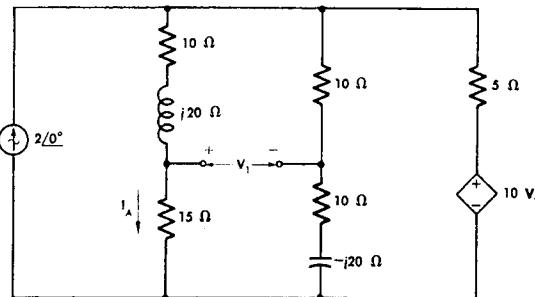
شکل (۴۲-۷): یک سیستم تغذیه بار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۶)

۱۷- در مدار ارائه شده در شکل (۴۳-۷) دو مولد، یک بار 10 kW را با ضریب قدرت 0.8 پس فاز و ولتاژ 440 V ، از طریق یک سیستم توزیع تغذیه می‌کنند. الف) فازور ولتاژهای \bar{V}_1 و \bar{V}_2 را برای دو مولد بیابید؛ ب) اگر مولد \bar{V}_2 ، توان 5 kW را با ضریب قدرت 0.6 پس فاز تولید کند، توان ظاهری و ضریب قدرت مولد با ولتاژ \bar{V}_1 را محاسبه کنید.



شکل (۴۳-۷): یک سیستم تغذیه بار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۷)

۱۸- در مدار الکتریکی شکل (۴۴-۷) جریان \bar{I}_A و ولتاژ \bar{V}_1 را تعیین کنید.



شکل (۴۴-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۸)

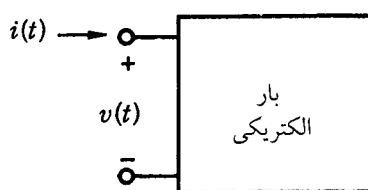
۱۹- یک شبکه تک قطبی مطابق شکل (۴۵-۷) را در نظر بگیرید. فرض کنید که،

$$v(t) = \sqrt{2} \times 10 \cos(10^3 t + 60^\circ)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \times 100 \cos 10^3 t$$

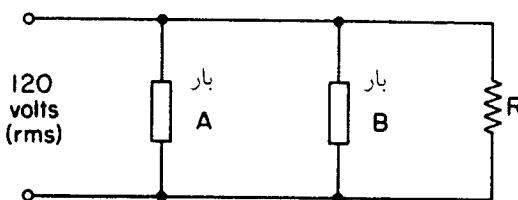
الف) توان حقیقی، موهومی و ظاهری فراهم شده برای شبکه تک قطبی مورد نظر را بیابید.

ب) امپدانس $(j\omega Z)$ و $(j\omega Y)$ را از دو سر شبکه مورد نظر تعیین کنید.



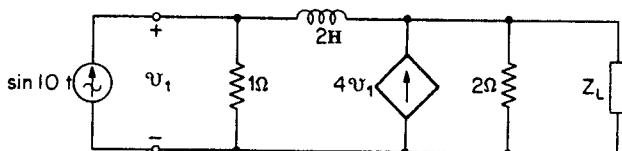
شکل (۴۵-۷): شبکه تک قطبی مربوط به سؤال (۱۹)

۲۰- در سیستم تغذیه ارائه شده در شکل (۴۶-۷)، یک منبع با فازور $120\angle 0^\circ$ V دو بار و یک مقاومت را تغذیه می‌کند. بار A توان 10 kW را در ضریب قدرت $0/6$ پس فاز دریافت می‌کند و بار B توان 8 kW را در ضریب قدرت $0/8$ پس فاز جذب می‌کند. حال مقدار مقاومت R را به‌گونه‌ای تعیین کنید که ضریب قدرت در منبع ولتاژ به‌مقدار $0/9$ افزایش یابد. البته این روش برای اصلاح ضریب قدرت، روش مفیدی نیست؛ زیرا تلفات انرژی را در سیستم زیاد می‌کند.



شکل (۴۶-۷): سیستم تغذیه مربوط به سؤال (۲۰)

۲۱- برای مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۴۷-۷)، امپدانس بار \bar{Z}_L را به‌گونه‌ای تعیین کنید که توان انتقالی به آن، به‌مقدار حداقل خود برسد. (راهنمایی: از دو سر بار \bar{Z}_L ، مدار معادل تونن مدار سمت چپ بار \bar{Z}_L را بیابید)



شکل (۴۷-۷): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۲۱)

فصل هشتم

تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در حل مدارهای الکتریکی

۱-۸ - مقدمه

در فصل‌های قبلی، روش‌های حل مدارهای الکتریکی را بیان نمودیم که براساس تشکیل معادلات شبکه استوار بود. در این روش‌ها یافتنم که اگر مدار به صورت مقاومتی به همراه منابع الکتریکی بود، معادلات به صورت جبری در می‌آمدند؛ اما اگر مدار مربوطه دارای عناصر سلف و خازن باشند (که معمولاً هم چنین است)، معادلات شبکه به صورت یک سری معادلات انتگرالی – دیفرانسیلی در می‌آمد که حل این نوع مدارها را با مشکل مواجه می‌کرد. برای حل این گونه مدارها باید از روش‌های حل معادلات با مشتقات مرتبه بالا از قبیل روش تیلور، رانگ کوتا، و ... استفاده نمود. یکی از روش‌های مفید و مؤثر در حل مدارهای الکتریکی، روش تبدیل لاپلاس^۱ می‌باشد که جزء ساده ترین، اساسی ترین، و پرکاربردترین این روش‌ها می‌باشد. البته این روش، فقط مناسب مدارهای الکتریکی با خصوصیات خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد و در دیگر مدارها، تقریباً بی فایده خواهد بود. بدین منظور، در این فصل برآنیم تا خواص تبدیل لاپلاس و روش تبدیل معادلات انتگرالی – دیفرانسیلی را به معادلات جبری بیان نموده و نحوه استفاده از این ابزار را در حل مدارهای الکتریکی بیان نماییم.

^۱- Laplace Transformation

۲-۸- تعریف تبدیل لاپلاس

روش حل مدارهای الکتریکی با استفاده از تبدیل لاپلاس به این صورت است که معادله دیفرانسیل توصیف کننده مدار موردنظر از حوزه زمان به حوزه فرکانس مختلط انتقال می‌یابد. با این انتقال، خواهیم دید که معادلات الکتریکی انتقال یافته به معادلات جبری ساده تبدیل می‌شوند. تبدیل لاپلاس، یک انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس است. فرض کنید که تابع $f(t)$ که در حوزه زمان تعریف شده است را به حوزه فرکانس منتقل نماییم که آن را با $F(s)$ نمایش می‌دهیم. روش این تبدیل به این صورت است که ابتدا تابع $f(t)$ را در عبارت e^{-st} ضرب می‌کنیم و سپس از تابع به دست آمده در حوزه تعریف (t) که از زمان $-\infty$ تا ∞ است انتگرال می‌گیریم. به عبارت دیگر،

$$F(s) = \mathcal{E}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1-8)$$

که در این رابطه $\mathcal{E}[f(t)]$ یا $F(s)$ ، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ ، و s متغیر فرکانس مختلط می‌باشد. البته شرط برقراری رابطه (۱-۸) آن است که انتگرال مذکور، همگرا باشد. معمولاً در سیستم‌های فیزیکی واقعی، به خاطر شرایط و محدودیت‌های عملی حاکم بر سیستم، شرط مذکور همیشه برقرار می‌باشد.

لازم به ذکر است که کران پایین انتگرال گیری، $-\infty$ می‌باشد و این به آن معنا است که شرایط تابع $f(t)$ از لحظه زمان اعمال آن، در انتگرال گیری موثر است. به عنوان مثال، اگر $f(t)$ به عنوان یک تابع ضربه در $t=0$ باشد، آنگاه کران پایین $-\infty$ باعث می‌شود که اثر این تابع ضربه در تبدیل لاپلاس آن ظاهر شود؛ به عبارت دیگر، انتگرال گیری، این ضربه را در بر خواهد داشت. همچنین معمولاً $f(t)$ را به ازای زمان‌های $t > 0$ برابر صفر در نظر می‌گیریم که این مسئله با این واقعیت که رفتار سیستم از لحظه اعمال تحریک آغاز می‌شود، تطبیق دارد.

با استفاده از روش تبدیل لاپلاس در معادله (۱-۸)، تبدیل معکوس لاپلاس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = \mathcal{E}^{-1}[F(s)] \quad (2-8)$$

که \mathcal{E}^{-1} عملگر تبدیل معکوس لاپلاس می‌باشد.

مثال (۱-۸): تبدیل لاپلاس تابع با $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ را بباید:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

حل: تابع مذکور، همان تعريف تابع پله واحد $u(t)$ است. با استفاده از رابطه تبديل لaplas (۱-۸) داريم:

$$F_1(s) = \int_{0^-}^{\infty} f_1(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

لذا میتوان نوشت:

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

مثال (۲-۸): تبديل لaplas مشتق تابع $f(t)$ يعني $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$ را ببایيد.

حل: براساس تعريف تبديل لaplas میتوان نوشت:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

حال اگر از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کنیم قادر هستیم که این تبديل لaplas را به دست آوریم. در روش جزء به جزء داشتیم که،

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

حال اگر فرض کنیم که،

$$u = e^{-st}, \quad dv = df(t)$$

آنگاه،

$$v = f(t), \quad du = -se^{-st} dt$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} u \cdot dv = f(t)e^{-t} \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-se^{-st}) dt$$

$$= -f(0^-) + s \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

از آنجایی که $\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ همان تبديل لaplas تابع $f(t)$ است، لذا میتوان نوشت:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-) \quad (۳-۸)$$

که $f(0^-)$ مقدار تابع $f(t)$ در زمان 0^- میباشد.

تمرین (۱-۸): تبديل لaplas تابع ضربه $f(t) = \delta(t)$ را ببایيد.

جواب: $F(s) = 1$

۳-۸- خواص اساسی تبدیل لاپلاس

خواص اساسی ارائه شده در تبدیل لاپلاس، فقط برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان مطرح می‌شود.

۳-۸-۱- خاصیت یکتاوی

خاصیت یکتاوی تبدیل لاپلاس بدین معنی است که برای یک تابع $f(t)$ تنها یک تبدیل لاپلاس $F(s)$ خواهد داشت و برعکس، تنها یک تابع $f(t)$ در حوزه زمان وجود دارد که تبدیل لاپلاس آن برابر $F(s)$ می‌باشد. این خاصیت را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathcal{E}[f(t)] = F(s) \Leftrightarrow \mathcal{E}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (4-8)$$

۳-۸-۲- خاصیت خطی بودن

یکی از خواص مهم تبدیل لاپلاس، خاصیت خطی بودن آن است. بدین منظور، ابتدا خاصیت همگن بودن این تبدیل را بیان می‌کنیم. فرض کنید که تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $k \cdot f(t)$ (که k یک عدد حقیقی و دلخواه است) برابر است با:

$$\mathcal{E}[k \cdot f(t)] = \int_0^\infty k \cdot f(t) e^{-st} dt = k \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = kF(s) \quad (5-8)$$

حال با توجه به آنکه تبدیل لاپلاس، یک رابطه خطی است، آنگاه با استفاده از خاصیت جمع آثار برآحتی می‌توان اثبات کرد که تبدیل لاپلاس تابع $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$ برابر $G(s) = F_1(s) + F_2(s)$ خواهد بود. به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^\infty [f_1(t) + f_2(t)] e^{-st} dt = \\ &= \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt = F_1(s) + F_2(s) \end{aligned} \quad (6-8)$$

در نتیجه با استفاده از روابط (۵-۸) و (۶-۸)، می‌توان خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس را به شکل کامل زیر بیان نمود:

$$\mathcal{E}\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(s) \quad (7-8)$$

مثال (۳-۸): در فصل‌های قبلی، رابطه ولتاژ و جریان یک خازن الکتریکی را به صورت زیر بیان نمودیم:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

که در این رابطه، C مقدار ثابت ظرفیت خازن است. حال فرض کنید که $I(s)$ و $V(s)$ تبدیل لاپلاس متغیرهای $i(t)$ و $v(t)$ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(s) = \mathcal{L}[i(t)] = \int_0^\infty i(t)e^{-st} dt$$

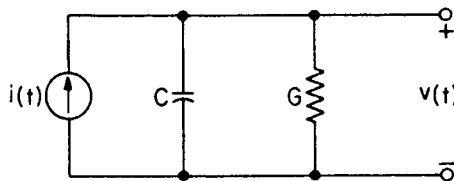
$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] = \int_0^\infty v(t)e^{-st} dt$$

آنگاه با استفاده از خاصیت تبدیل لاپلاس مشتق یکتابع و خاصیت همگن بودن در تبدیل

لاپلاس، رابطه $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$ را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$I(s) = C[sV(s) - v(o^-)] = sCV(s) - Cv(o^-)$$

مثال (۴-۸): در شکل (۱-۸) رابطه KCL را در حوزه فرکانس بیان نمایید.



شکل (۱-۸): مدار RC ساده

حل: رابطه KCL در مدار شکل (۱-۸) در حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R}$$

حال اگر از دو طرف رابطه اخیر، تبدیل لاپلاس بگیریم، خواهیم داشت:

$$I(s) = C(sV(s) - v(o^-)) + \frac{V(s)}{R}$$

و در نتیجه،

$$I(s) = (sC + \frac{1}{R})V(s) - Cv(o^-)$$

که در این رابطه، از خواص همگن بودن و خطی بودن تبدیل لاپلاس استفاده شده است.

۳-۳-۸ - خاصیت مشتق‌گیری متوالی

در بخش قبل، تبدیل لاپلاس مشتق یکتابع را بیان نمودیم. حال می‌خواهیم بینیم که

تبدیل لاپلاس مشتقات با مرتبه بالای یک تابع $f(t)$ به چه صورت خواهد بود. فرض

$$\text{کنید که } g(t) = \frac{df(t)}{dt} \text{ باشد. در نتیجه،}$$

$$\frac{d^{\gamma} f(t)}{dt^{\gamma}} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} \quad (8-8)$$

آنگاه با استفاده از رابطه (۳-۸) تبدیل لاپلاس تابع $\frac{dg}{dt}$ برابر است با:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dg}{dt}\right] = s \mathcal{L}[g(t)] - g(o^-) \quad (9-8)$$

حال با توجه به آنکه $g(t) = \frac{df}{dt}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{\gamma} f(t)}{dt^{\gamma}}\right] = s \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] - \frac{df}{dt}(o^-)$$

که $\frac{df(o^-)}{dt}$ مقدار تغییرات $f(t)$ در زمان $t = o^-$ می‌باشد. با استفاده از رابطه (۳-۸)، رابطه اخیر به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{\gamma} f(t)}{dt^{\gamma}}\right] = s[sF(s) - f(o^-)] - \frac{df}{dt}(o^-)$$

و در نهایت داریم:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{\gamma} f(t)}{dt^{\gamma}}\right] = s^{\gamma} F(s) - sf(o^-) - \frac{df}{dt}(o^-) \quad (10-8)$$

با گسترش رابطه (۱۰-۸) می‌توان به تبدیل لاپلاس مشتقات با مرتبه n ام یک تابع $f(t)$ به صورت زیر اشاره نمود:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(o^-) - s^{n-2}\frac{df(o^-)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(o^-) \quad (11-8)$$

مثال (۵-۸): مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۸) مفروض می‌باشد. با فرض آنکه ورودی منبع ولتاژ به صورت تابع ضربه $e(t) = \delta(t)$ باشد، می‌خواهیم پاسخ ضربه جریان مدار $i(t)$ را بیابیم که به این پاسخ، $h(t)$ می‌نامیم. بدین منظور با توجه به آنکه $i(o^-) = h(o^-) = 0$ می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$L \frac{dh(t)}{dt} + R.h(t) = \delta(t), \quad h(o^-) = 0$$

حال با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله اخیر به صورت زیر در می‌آید:

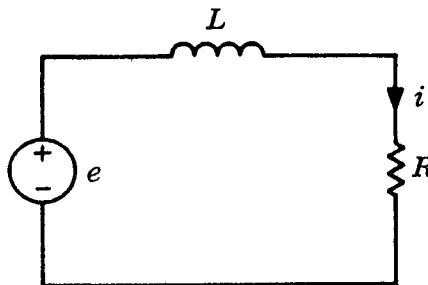
$$L \mathcal{F} \left[\frac{dh}{dt} \right] + R \mathcal{F} [h] = \mathcal{F} [\delta(t)] = 1$$

در نتیجه با بکار بردن قاعده مشتق‌گیری و شرط اولیه پاسخ ضربه خواهیم داشت:

$$(Ls + R) \mathcal{F} [h(t)] = 1$$

$$\mathcal{F} [h(t)] = \frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$

$$h(t) = \frac{1}{L} u(t) e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0$$



شکل (۲-۸): مدار خطی RL تغییرناپذیر با زمان

۴-۳-۸- خاصیت انتگرال‌گیری

خاصیت انتگرال‌گیری، عکس مشتق‌گیری است. برای این منظور، فرض می‌کنیم که

می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع $\int_{o^-}^t f(t') dt'$ را به دست آوریم. در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$\mathcal{F} \left[\int_{o^-}^t f(t') dt' \right] = \int_{o^-}^{\infty} \left[\int_{o^-}^t f(t') dt' \right] e^{-st} dt$$

برای این انتگرال‌گیری از خاصیت انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌شود. با این روش خواهیم داشت:

$$\mathcal{F} \left[\int_{o^-}^t f(t') dt' \right] = \left[\int_{o^-}^t f(t') dt' \right] \Big|_{-s}^{\infty} - \int_{o^-}^{\infty} f(t) (-\cancel{\Big/}_s) e^{-st} dt$$

در رابطه اخیر، جمله اول برابر صفر می‌باشد؛ زیرا مقدار انتگرال مذکور برای $t = o^-$ برابر صفر است. در نهایت داریم:

$$\mathcal{F} \left[\int_{o^-}^t f(t') dt' \right] = \frac{1}{s} \int_{o^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \mathcal{F}[f(t)] \quad (۱۲-۸)$$

مثال (۶-۸): در فصول قبلی بیان نمودیم که رابطه بین ولتاژ و جریان یک خازن به صورت زیر بیان می‌گردد:

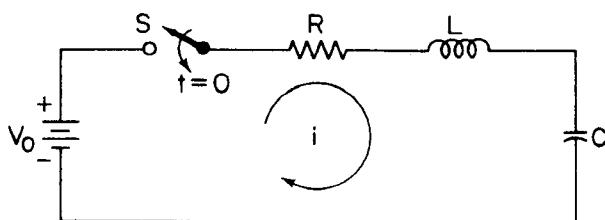
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{o^-}^t i(\tau) d\tau + v(o^-)$$

حال می‌خواهیم این رابطه را با استفاده از تبدیل لاپلاس، به حوزه فرکانس منتقل نماییم. طرف راست رابطه اخیر از یک قسمت انتگرالی و یک جمله ثابت $v(o^-)$ تشکیل شده است. جمله ثابت $v(o^-)$ که همان ولتاژ اولیه خازن است، از زمان $t=o^-$ آغاز شده و تا آخر هم وجود دارد. به عبارت دیگر، به صورت یک تابع پله با دامنه $v(o^-)$ عمل می‌کند. در نتیجه، با استفاده از رابطه (۱۲-۸) خواهیم داشت:

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(o^-)}{s}$$

که $V(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $v(t)$ و $I(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $i(t)$ می‌باشد.

مثال (۷-۸): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۸) اگر در لحظه $t=o$ کلید S بسته شود، با اعمال ورودی منبع ولتاژ به صورت $V_o u(t)$ ، رابطه KVL را در حوزه فرکانس به دست آورید.



شکل (۳-۸): مدار RLC سری

حل: ابتدا معادله KVL را برای حلقه مدار می‌نویسیم:

$$V_o \cdot u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{o^-}^t i(\tau) d\tau + v_C(o^-)$$

با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس در مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\frac{V_o}{s} = (R + sL + \frac{1}{sC}) I(s) + \frac{V_C(o^-)}{s} - L \cdot i(o^-)$$

مثال (۸-۸): با استفاده از روابط $\int_{o^-}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$ و $\delta(t) = 1$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

تمرین (۲-۸): با استفاده از $k+1$ انتگرال گیری متوالی از تابع پله واحد، اثبات کنید که،

$$\int_0^t \frac{t'^k}{k!} dt' = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

برای k صحیح

و سپس با تبدیل لاپلاس از این انتگرال گیری‌ها به این نتیجه برسید که،

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{s^{n+1}}$$

برای n صحیح

۴-۸- تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی

در این بخش برآئیم که تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی متداول در حل مدارهای الکتریکی را مورد بررسی قرار داده و خواص آنها را بیان نماییم. در بخش‌های قبلی بیان نمودیم که تبدیل لاپلاس تابع پله و ضربه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (۱۳-۸)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (۱۴-۸)$$

- تابع ضربه ($\delta(t-t_0)$)

به عنوان مثال دیگر، می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع ضربه واحد ($\delta(t-t_0)$) را به دست آوریم. بدین منظور داریم:

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t-t_0) dt = e^{-st_0} \quad (۱۵-۸)$$

این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که تابع ضربه ($\delta(t-t_0)$) فقط در $t=t_0$ غیر صفر است و در بقیه زمان‌ها دارای مقدار صفر می‌باشد.

- تابع نمایی ($e^{-at}u(t)$)

با فرض آنکه ضریب a مقدار مثبتی باشد آنگاه تبدیل لاپلاس ($e^{-at}u(t)$) را می‌توان به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \int_{0^-}^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \int_{0^-}^\infty e^{-(s+a)t} dt = \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0^-}^\infty = \frac{1}{s+a} \quad (۱۶-۸)$$

البته رابطه فوق به ازاء $a < 0$ نیز صادق می‌باشد. همچنین اگر $a = 0$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس آن برابر تبدیل لاپلاس $u(t)$ است که در رابطه (۸-۱۳) آورده شده است.

- تابع نمایی $e^{j\omega t}u(t)$

مشابه حالت قبل، می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{j\omega t}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s-j\omega)t}dt = \frac{1}{s-j\omega} \quad (۱۷-۸)$$

و به طور مشابه، تبدیل لاپلاس تابع $e^{-j\omega t}u(t)$ برابر است با:

$$\mathcal{L}[e^{-j\omega t}u(t)] = \frac{1}{s+j\omega} \quad (۱۸-۸)$$

- تابع نمایی $\cos \omega t u(t)$ و $\sin \omega t u(t)$

از مبحث ریاضیات پایه می‌دانیم که براساس قاعده اول^۱ تابع سینوسی و کسینوسی را می‌توان به صورت نمایی زیر بیان نمود:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

حال با استفاده از روابط (۱۷-۸) و (۱۸-۸) تبدیل لاپلاس تابع سینوسی و کسینوسی قابل محاسبه می‌باشد که،

$$\mathcal{L}[\cos \omega t u(t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (۱۹-۸)$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t u(t)] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (۲۰-۸)$$

این روابط را می‌توان از خاصیت تبدیل لاپلاس مشتق تابع که به صورت

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

نیز به دست آورد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(\sin \omega t u(t))\right] = s \mathcal{L}[\sin \omega t u(t)] - \sin \omega t u(t)|_{t=0^-} = s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0 = \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2}$$

اما با توجه به آنکه مشتق $\sin \omega t u(t)$ برابر $\omega \cos \omega t u(t)$ است، لذا خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[\omega \cos \omega t \cdot u(t)] = \frac{s\omega}{s^2 + \omega^2}$$

و در نهایت،

$$\mathcal{L}[\cos \omega t \cdot u(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

که می‌بینیم با استفاده از رابطه (۲۰-۸) و خاصیت مشتق‌گیری در تبدیل لاپلاس، توانستیم تبدیل لاپلاس ارائه شده در رابطه (۱۹-۸) را به اثبات رسانیم.

- تابع شب $ktu(t)$

برای اینکه بتوانیم تبدیل لاپلاس تابع شب $ktu(t)$ ^۱ را به دست آوریم از رابطه تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم که،

$$\mathcal{L}[ktu(t)] = \int_0^\infty kt \cdot e^{-st} dt = \frac{k}{s^2} \quad (21-8)$$

این رابطه تبدیل لاپلاس را می‌توان از خاصیت تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع به دست آورد. همچنین انتگرال بالا را می‌توان با استفاده از روش جزء به جزء نیز حل نمود.

- تابع $\int_0^t f(t)dt$

برای یافتن تبدیل لاپلاس یک تابع انتگرالی $\int_0^t f(t)dt$ از رابطه تبدیل لاپلاس به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t)dt \right] dt$$

حال از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌شود تا بتوان انتگرال فوق را به دست آورد. بدین منظور فرض کنید که،

$$u = \int_0^t f(t)dt, \quad dv = e^{-st} dt$$

$$du = f(t)dt, \quad v = \frac{-1}{s} e^{-st}$$

در نتیجه،

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \left\{ \frac{-1}{s} e^{-st} \int_0^t f(t)dt \right\} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} F(s)$$

که جمله اول در سمت راست معادله به ازای کرانه‌های بالا و پایین، برابر صفر می‌باشد. لذا در نهایت داریم:

^۱- Ramp Function

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (22-8)$$

حال با استفاده از این رابطه و با در نظر گرفتن آنکه تبدیل لاپلاس تابع $u(t)$ برابر $\frac{1}{s}$ است، لذا رابطه (21-8) را می‌توان به راحتی با استفاده از رابطه (22-8) بدست آورد. پس مشتق‌گیری از تابع در حوزه زمان، معادل با آن است که تابع در حوزه فرکانس را در s ضرب کنیم و بر عکس، انتگرال‌گیری از تابع در حوزه زمان، معادل با آن است که تابع در حوزه فرکانس را به s تقسیم کنیم.

$$- \text{تابع } e^{-at} f(t)$$

با فرض آنکه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $e^{-at} f(t)$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+a)t} dt$$

رابطه اخیر شبیه به رابطه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است؛ با این تفاوت که به جای ابراتور s ، عملگر $s+a$ جایگزین شده است. پس،

$$\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (23-8)$$

یعنی اگر تابع $f(t)$ در جمله e^{-at} ضرب شود، تبدیل لاپلاس تابع حاصل، برابر انتقال یافته تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به اندازه a (یعنی $F(s+a)$) است.

در نتیجه، با استفاده از این خاصیت، به راحتی می‌توان رابطه (16-8) را بدست آورد؛ یعنی

$$\text{با توجه به آنکه } \mathcal{L} [u(t)] = \frac{1}{s} \text{ می‌باشد، لذا،}$$

$$\mathcal{L} [e^{-at} u(t)] = \frac{1}{s+a}$$

- انتقال زمان یک تابع

تاکنون در مورد تبدیل لاپلاس تابع زمانی بحث کردیم که از لحظه $t=0$ شروع می‌شوند. حال می‌خواهیم بینیم اگر تابعی از زمان $t=a$ آغاز شود، تبدیل لاپلاس تابع مذکور، چه تغییری می‌کند. بدین منظور فرض کنید که $\mathcal{L} [f(t)] = F(s)$ باشد. حال می‌خواهیم بینیم تبدیل لاپلاس $f(t-a)u(t-a)$ (با $a > 0$) چگونه است؟؛ به عبارت دیگر، چه ارتباطی با $F(s)$ دارد. بدین منظور از تابع $f(t-a)u(t-a)$ به شکل زیر، تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L} [f(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a) dt = \int_{a^-}^\infty f(t-a) e^{-st} dt$$

حال اگر تغییر متغیر $\tau = t - a$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-as} F(s)$$

در نتیجه،

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (24-8)$$

پس نتیجه می‌گیریم که اگر یک تابع زمانی $f(t)$ به مقدار a ثانیه، تأخیر یابد، آنگاه تابع لاپلاس $F(s)$ آن در جمله e^{-as} ضرب می‌شود. مثلاً تبدیل لاپلاس تابع $(t-4)u(t-4)$ برابر

$$\frac{1}{s} e^{-4s}$$

- توابع متناوب $f(t)$

فرض کنید که یک تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب T وجود دارد که می‌خواهیم تبدیل لاپلاس آن را به دست آوریم. شکل کلی یک تابع متناوب را می‌توان در شکل (۴-۸) مشاهده نمود. حال اگر تابع موردنظر در دوره تناوب اول را به صورت $f_1(t)$ بیان کنیم، آنگاه تابع $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

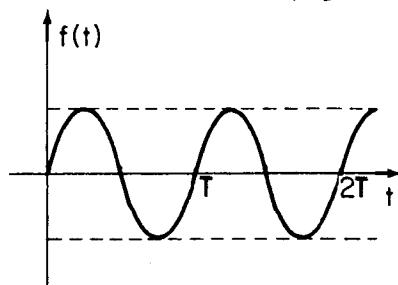
$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T)u(t-T) + f_1(t-2T)u(t-2T) + \dots \quad (25-8)$$

که $f_1(t)$ تابع در سیکل اول، $f_1(t-T)u(t-T)$ تابع در سیکل دوم و ... می‌باشد. حال با استفاده از رابطه (۲۴-۸) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ در رابطه (۲۵-۸) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = F_1(s) \left[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots \right]$$

با توجه به آنکه جملات داخل کروشه، بسط تابع $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ است، لذا خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (26-8)$$



شکل (۴-۸): شکل موج یک تابع متناوب

- مشتق‌گیری از تابع لاپلاس ($F(s)$)

در این قسمت می‌خواهیم بدانیم، در صورتی که از تابع $F(s)$ بر حسب s مشتق بگیریم، چه تغییری در تابع حوزه زمانی آن یعنی $f(t)$ صورت می‌گیرد. بدین منظور داریم:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} [-tf(t)] dt$$

پس نتیجه می‌گیریم که،

$$\mathcal{E}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s) \quad (27-8)$$

با استفاده از همین خاصیت مشتق‌گیری از تابع لاپلاس ($F(s)$) به راحتی می‌توان اثبات کرد که،

$$\mathcal{E}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (28-8)$$

لازم به ذکر است که برای به دست آوردن این رابطه می‌توانیم از رابطه $\mathcal{E}[t \cdot u(t)] = \frac{1}{s^2}$ و معادله (27-8) استفاده کنیم.

- انتگرال‌گیری از تابع ($F(s)$)

مثل حالت قبل می‌خواهیم بدانیم در صورتی که از تابع $F(s)$ با متغیر s ، انتگرال‌گیری کنیم تابع $f(t)$ آن چه تغییری می‌کند. باز می‌توان اثبات نمود که،

$$\int_s^\infty F(s) ds = \mathcal{E}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \quad (29-8)$$

- تبدیل لاپلاس ($f(at)$)

در صورتی که $F(s) = \mathcal{E}[f(t)]$ باشد آنگاه،

$$\mathcal{E}[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $at = \tau$ داریم:

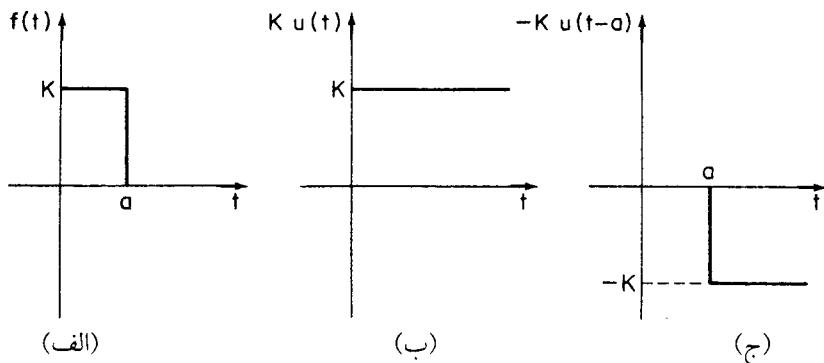
$$\mathcal{E}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{\frac{-s}{a}\tau} f(\tau) d\tau$$

در نتیجه،

$$\mathcal{E}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (30-8)$$

حال برای درک بهتر این موارد، مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم.

مثال (۹-۸): تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را در شکل (۵-۸-الف) بیابید.



شکل (۸-۵): شکل موج یک تابع پالس

حل: برای این منظور، تابع ارائه شده در شکل ۵-۸ (الف) را می‌توان از مجموع دو تابع ارائه شده در شکل های ۵-۸ (ب و ج) بدست آورد. یعنی،

$$f(t) = k[u(t) - u(t-a)]$$

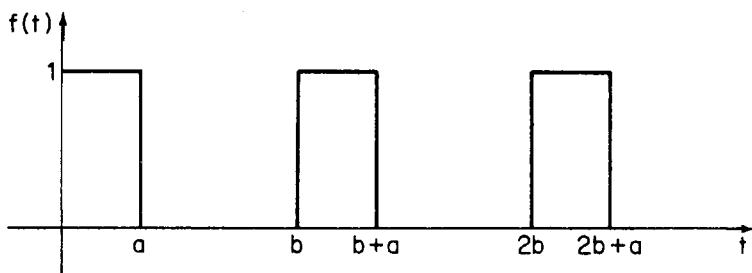
حال با استفاده از تبدیل لابلانس (L) و با کمک رابطه (۸-۲۴)، تبدیل لابلانس تابع فوق به راحتی قابل محاسبه است:

$$\mathfrak{F}[k.u(t)] = \frac{k}{s} \quad , \quad \mathfrak{F}[-ku(t-a)] = -\frac{k}{s}e^{-as}$$

در نتیجه،

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{k}{s} (1 - e^{-as})$$

مثال (۸-۱۰): تابع لاپلاستابع متناوب ارائه شده در شکل (۸-۶) را بیابید.



شکل (۸-۶): تابع متناوب مربوط به مثال (۱۰-۸)

حل: برای به دست آوردن تبدیل لاپلاس توابع متناوب از رابطه (۲۶-۸) استفاده می کنیم.
در مثال قبل، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که یک تابع پالس است را به دست آوردیم که دامنه آن به مقدار k بود. لذا در این مثال، تبدیل لاپلاس $(t)f(t)$ برابر است با:

$$F_1(s) = \frac{1 - e^{-as}}{s}$$

حال با توجه به آنکه دوره تناوب تابع $f(t)$ در شکل (۶-۸) برابر b می باشد، لذا با توجه به رابطه (۲۶-۸) می توان نوشت:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1 - e^{-as}}{s(1 - e^{-bs})}$$

مثال (۱۱-۸): تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin \omega_0 t \cdot u(t)}{t} u(t)$ را بباید.
حل: قبلًا محاسبه نمودیم که،

$$\mathcal{L}[\sin \omega_0 t \cdot u(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

حال با استفاده از رابطه (۲۹-۸) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega_0 t \cdot u(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} ds = \tan^{-1} \frac{s}{\omega_0} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{\omega_0}$$

مثال (۱۲-۸): تبدیل لاپلاس تابع $\cos 100\pi t \cdot u(t)$ را بباید.
حل: قبلًا محاسبه نمودیم که،

$$\mathcal{L}[\cos t \cdot u(t)] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

حال با استفاده از رابطه (۳۰-۸) با فرض آنکه $a = 100\pi$ می باشد، داریم:

$$\mathcal{L}[\cos 100\pi t \cdot u(t)] = \frac{1}{100\pi} \cdot \frac{\frac{s}{100\pi}}{\left(\frac{s}{100\pi}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + (100\pi)^2}$$

برای جمع بندی مطالب ارائه شده در این بخش، فهرستی از تبدیل لاپلاس بعضی توابع مرسوم در مدارهای الکتریکی در جدول (۱-۸) ارائه شده است. همچنین خواص اساسی ارائه شده در تبدیل لاپلاس را می توان در جدول (۲-۸) مشاهده نمود.

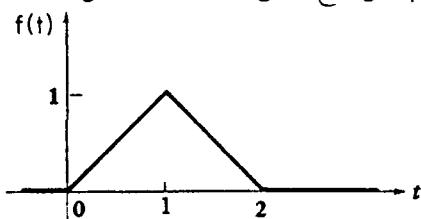
جدول (۱-۸): تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی مرسوم

$f(t)$	$F(s)$
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
$K.f(t)$	$K.F(s)$
$\frac{d}{dt} f(t)$	$s.F(s) - f(0^-)$
$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} f(t)$	$s^\gamma.F(s) - s.f(0^-) - \frac{df}{dt}(0^-)$
$\frac{d^{\gamma'}}{dt^{\gamma'}} f(t)$	$s^{\gamma'}.F(s) - s^{\gamma'}.f(0^-) - s.\frac{df}{dt}(0^-) - \frac{d^{\gamma'} f}{dt^{\gamma'}}(0^-)$
$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + g(0^-)$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{g(0^-)}{s}$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t.f(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
$t^n.f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s.F(s)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s.F(s)$

تمرین (۳-۸): تبدیل لاپلاس تابع $e^{-at} \cos \omega_o t$ و te^{-at} را بیابید.

$$\text{جواب: بترتیب} \quad \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_o^2}, \quad \frac{1}{(s+a)^2}$$

تمرین (۴-۸): تبدیل لاپلاس تابع زمانی ارائه شده در شکل (۷-۸) را بیابید.



شکل (۷-۸): تابع زمانی مربوط به تمرین (۴-۸)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) \quad \text{جواب:}$$

جدول (۲-۸): خواص اساسی تبدیل لاپلاس

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	۱
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at} \quad a > 0$	$\frac{1}{(s+a)}$
$te^{-at} \quad a > 0$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t \quad a > 0$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t \quad a > 0$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t + \theta) \quad a > 0$	$\frac{(s+a) \sin \theta + \omega \cos \theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t + \theta) \quad a > 0$	$\frac{(s+a) \cos \theta - \omega \sin \theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$r K e^{-at} \cos(\omega t + \angle K) \quad a > 0$	$\frac{K}{s+a-j\omega} + \frac{K^*}{s+a+j\omega}$

۵-۸- تبدیل لاپلاس معکوس توابع پیچیده

در بیشتر مسائل مدارهای الکتریکی، تابع‌هایی که تبدیل معکوس آنها پاسخ حوزه زمانی را به دست می‌دهد، اغلب از جفت تبدیل‌های آورده شده در جداول (۱-۸) و (۲-۸) پیچیده‌تر هستند. لذا برای استفاده از خواص این جداول، می‌بایست یک رشته عملیات جبری بر روی $F(s)$ انجام شود تا بتوان تابع زمانی $f(t)$ آن را به دست آورد. روشی که اغلب برای تجزیه هر تابع $F(s)$ به تابع‌های ساده به کار می‌رود، تجزیه به کسرهای ساده است.

برای تجزیه تابع گویا به جزء‌های ساده، یک روش کلی و عمومی وجود دارد که به گسترش به صورت کسرهای جزیی^۱ معروف است. برای این منظور، تابع گویای (s) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F(s) = \frac{C(s)}{B(s)} = \frac{c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (31-8)$$

که $C(s)$ و $B(s)$ چند جمله‌ای‌هایی بر حسب متغیر s بوده و ضرایب c_0 تا c_m و b_0 تا b_n اعداد حقیقی می‌باشند. همچنین z_i تعداد صفرهای تابع $F(s)$ می‌باشد که ریشه‌های معادله $C(s) = 0$ می‌باشد و p_j تعداد قطب‌های تابع $F(s)$ است که ریشه‌های معادله $B(s) = 0$ می‌باشند.

اولین مرحله در گسترش تابع $F(s)$ به صورت کسرهای جزیی، نوشتن این تابع به صورت مناسب^۲ می‌باشد؛ به این معنی که درجه چند جمله‌ای صورت، باید از درجه چند جمله‌ای مخرج کوچک‌تر باشد. برای این منظور، مناسب است تا با تقسیم صورت بر مخرج، بتوان تابع $F(s)$ را به صورت زیر به شکل مناسب در آورد:

$$F(s) = \frac{C(s)}{B(s)} = g_1 + g_2 s + g_3 s^2 + \dots + g_{k+1} s^k + \frac{A(s)}{B(s)} \quad (32-8)$$

که فرض شده است درجه صورت به مقدار k از درجه مخرج، بزرگ‌تر است. با این کار، درجه چند جمله‌ای $A(s)$ از درجه چند جمله‌ای $B(s)$ کمتر می‌شود. لذا تبدیل لاپلاس معکوس رابطه (۳۲-۸) به شکل زیر به دست می‌آید:

¹- Partial Fraction Expansion

²- Proper

$$f(t) = \mathcal{E}^{-1}[F(s)] = g_1\delta(t) + g_2\delta^{(1)}(t) + \dots + g_{k+1}\delta^{(k)}(t) + \mathcal{E}^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right] \quad (۳۳-۸)$$

حال کافی است تبدیل لاپلاس معکوس تابع چند جمله‌ای $\frac{A(s)}{B(s)}$ را به دست آوریم که خاصیت این تابع گویا، آن است که درجه چند جمله‌ای صورت از مخرج، کوچک‌تر است.

برای این منظور، تابع $\frac{A(s)}{B(s)}$ را به صورت کسرهای جزیی در می‌آوریم. در اینجا سه حالت وجود دارد و آن، به این صورت است که قطب‌های چند جمله‌ای (s) می‌تواند به صورت قطب‌های ساده، قطب‌های مکرر، و یا قطب‌های مختلط باشد که در ادامه به این سه نوع قطب و روش‌های تجزیه هر کدام اشاره می‌شود.

حالت اول: قطب‌های ساده:

در صورتی که ریشه‌های معادله $B(s)$ به صورت ساده و غیر تکراری باشد، آنگاه تابع

$$\frac{A(s)}{B(s)} \text{ را می‌توان به شکل ساده زیر و به صورت کسرهای جزیی تقسیم بندی نمود:}$$

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i} \quad (۳۴-۸)$$

که ضرایب k_1 تا k_n را می‌توان با مخرج مشترک چند جمله‌ای‌ها سمت راست و معادل قرار دادن صورت توابع سمت چپ و راست به دست آورد. آنگاه تبدیل لاپلاس معکوس هر جمله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{E}^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right] = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} \quad (۳۵-۸)$$

مثال (۱۳-۸): تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید.

$$F_1(s) = \frac{3s+5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

حل: می‌دانیم که قطب‌های تابع $F_1(s)$ برابر $p_1 = -1$ و $p_2 = -2$ می‌باشد. پس،

$$F_1(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} = \frac{k_1(s+2) + k_2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

با تساوی قرار دادن چند جمله‌ای صورت معادله اخیر، با صورت تابع $F_1(s)$ داریم:

$$3s+5 = k_1(s+2) + k_2(s+1)$$

يعني،

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 3 \\ 2k_1 + k_2 = 5 \end{cases}$$

در نتیجه، $k_1 = 2$ و $k_2 = 1$ می‌باشد. پس،

$$F_1(s) = \frac{3s+5}{s^3 + 3s^2 + 2} = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

آنگاه تبدیل لاپلاس معکوس $F_1(s)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(t) = \mathcal{E}^{-1}[F_1(s)] = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

در این مثال ساده، روش تجزیه کسرها نشان داده شده است ولی اگر تعداد قطب‌های چند جمله‌ای مخرج، زیاد باشد، دیگر این روش کارساز نیست. راه ساده و مناسی که برای به دست آوردن ضرایب k_i در رابطه (۳۴-۸) وجود دارد این است که از رابطه زیر استفاده شود:

$$k_i = (s - p_i) F_1(s) \Big|_{s=p_i} \quad (36-8)$$

مثال (۱۴-۸): تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را باید:

$$F_1(s) = \frac{6s^3 + 25s + 23}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6s^3 + 25s + 23}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

حل: با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$F_1(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

حال با استفاده از رابطه (۳۶-۸) می‌توان نوشت:

$$k_1 = (s+1) \left. \frac{6s^3 + 25s + 23}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \right|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = 3, \quad k_3 = 1$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

و با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس از جملات سمت راست رابطه اخیر، تابع زمانی آن محاسبه می‌شود:

$$f_1(t) = \mathcal{E}^{-1}[F_1(s)] = [2e^{-t} + 3e^{-2t} + e^{-3t}]u(t)$$

حالت دوم: قطب‌های مکرر

فرض کنید که تابع $F_1(s)$ دارای یک قطب تکراری p_0 با رتبه n و m قطب مجزای دیگر باشد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_1(s) = \frac{A(s)}{(s - p_o)^n \prod_{i=1}^m (s - p_i)} \quad (۳۷-۸)$$

حال اگر بخواهیم این تابع را بر حسب کسرهای جزیی بیان کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{k_{o1}}{(s - p_o)} + \frac{k_{o2}}{(s - p_o)^2} + \dots + \frac{k_{on}}{(s - p_o)^n} + \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_m}{s - p_m} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{k_{oi}}{(s - p_o)^i} + \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{(s - p_i)} \end{aligned} \quad (۳۸-۸)$$

که تبدیل لاپلاس تک تک جملات سمت راست رابطه اخیر برابر است با:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = k_{o1}e^{p_o t} + k_{o2}te^{p_o t} + \dots + \frac{k_{on}t^{n-1}e^{p_o t}}{(n-1)!} + k_1e^{p_1 t} + \dots + k_me^{p_m t} \\ &= e^{p_o t} \sum_{i=1}^n \frac{k_{oi}t^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^m k_i e^{p_i t} \end{aligned} \quad (۳۹-۸)$$

حال برای محاسبه k_i از همان رابطه (۳۶-۸) استفاده می شود ولی برای محاسبه ضرایب k_{oi} با استفاده از خواص مشتق گیری از تابع لاپلاس از روابط زیر استفاده می شود:

$$\begin{aligned} k_{o,n} &= \frac{1}{o!} (s - p_o)^n F_1(s) \Big|_{s=p_o} \\ k_{o,n-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d}{ds} [(s - p_o)^n F_1(s)] \Big|_{s=p_o} \end{aligned} \quad (۴۰-۸)$$

$$k_{o,n-i} = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{ds^i} [(s - p_o)^n F_1(s)] \Big|_{s=p_o}$$

مثال (۱۵-۸): تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F_1(s)$ زیر را بیابید.

$$F_1(s) = \frac{4s^3 + 11s + 9}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{4s^3 + 11s + 9}{(s+1)^2(s+2)}$$

حل: مشخص است که چند جمله‌ای مخرج، دارای یک ریشه $-p_o = -1$ از مرتبه ۲ و یک ریشه $-p_1 = -2$ از مرتبه اول است. پس،

$$F_1(s) = \frac{k_{o1}}{s+1} + \frac{k_{o2}}{(s+1)^2} + \frac{k_1}{s+2}$$

حال برای به دست آوردن هر یک از ضرایب، با استفاده از روابط (۳۶-۸) و (۴۰-۸) آنها را محاسبه می‌کنیم:

$$k_1 = (s+2) \cdot \left. \frac{4s^2 + 11s + 9}{(s+1)^2(s+2)} \right|_{s=-1} = 3$$

$$k_{o1} = (s+1)^2 F_1(s) \Big|_{s=-1} = \left. \frac{4s^2 + 11s + 9}{s+2} \right|_{s=-1} = 2$$

$$k_{o2} = \left. \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 F_1(s) \right] \right|_{s=-1} = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{4s^2 + 11s + 9}{s+2} \right] \right|_{s=-1} = 1$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+2}$$

و در نهایت، تابع زمانی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$f_1(t) = \mathcal{E}^{-1}[F_1(s)] = [e^{-t} + 2te^{-t} + 3e^{-2t}] u(t)$$

حالت سوم: قطب‌های مختلط

در صورتی که قطب‌های مختلط در چند جمله‌ای مخرج $F_1(s)$ موجود باشد می‌توان از روش ارائه شده در حالت دوم نیز استفاده نمود؛ ولی با توجه به خاصیت قطب‌های مختلف، امکان ساده سازی کسرهای جزئی مربوط به قطب‌های مختلط، بیشتر می‌باشد. برای این منظور، فرض کنید که چند جمله‌ای مخرج $F_1(s)$ دارای یک قطب مختلط p_o و p_o^* باشد (علامت * به معنای مزدوج p_o است). آنگاه می‌توان نوشت:

$$F_1(s) = \frac{A(s)}{(s-p_o)(s-p_o^*)Q(s)} \quad (41-8)$$

که با روش تجزیه کسرها، رابطه اخیر را می‌توان به رابطه زیر تبدیل نمود:

$$F_1(s) = \frac{k_1}{(s-p_o)} + \frac{k_2}{(s-p_o^*)} + \frac{R(s)}{Q(s)} \quad (42-8)$$

که تابع تجزیه کسرها برای دیگر قطب‌های تابع $F_1(s)$ است. حال با استفاده از رابطه (۴۲-۸) مقادیر k_1 و k_2 به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} k_1 &= (s - p_o) F_1(s) \Big|_{s=p_o} \\ k_2 &= (s - p_o^*) F_1(s) \Big|_{s=p_o^*} \end{aligned} \quad (43-8)$$

از روابط (۴۳-۸) در می‌بایس که k_2 مزدوج مختلط k_1 است یعنی،

$$k_2 = k_1^* = k_r - jk_i \quad , \quad p_o^* = \sigma_o - j\omega_o$$

لذا دو جمله اول کسرهای جزیی ارائه شده در سمت راست رابطه (۴۲-۸) را می‌توان با یکدیگر ترکیب نموده و رابطه مذکور را به شکل زیر خلاصه نمود:

$$F_1(s) = \frac{2k_r s - 2k_r \sigma_o - 2k_i \omega_o}{(s - \sigma_o)^2 + \omega_o^2} + \frac{R(s)}{Q(s)} \quad (44-8)$$

مثال (۱۶-۸): تابع زمانی تبدیل لاپلاس زیر را باید.

$$F_1(s) = \frac{s^2 + 3s + 7}{[(s+2)^2 + 4](s+1)}$$

حل: با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$F_1(s) = \frac{k_1}{s - (-2 + j2)} + \frac{k_1^*}{s - (-2 - j2)} + \frac{k_2}{s + 1}$$

حال با بکار بردن روابط (۴۳-۸) می‌توان نوشت:

$$k_1 = (s + 2 - j2) F(s) \Big|_{s=-2+j2} = \left. \frac{s^2 + 3s + 7}{(s+2+j2)(s+1)} \right|_{s=-2+j2} = \frac{1}{4} j = \frac{1}{4} e^{j90^\circ}$$

$$k_2 = (s + 1) F_1(s) \Big|_{s=-1} = 1$$

در نتیجه، با استفاده از رابطه (۴۴-۸) خواهیم داشت:

$$F_1(s) = \frac{-2 \times \frac{1}{4} \times 2}{(s+2)^2 + 4} + \frac{1}{(s+1)}$$

در نهایت، تابع زمانی $f_1(t)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$f_1(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t + e^{-t} \quad t \geq 0$$

تمرین (۵-۸): تابع زمانی تبدیل لاپلاس زیر را باید.

$$F_1(s) = \frac{4s^2 + 7s + 13}{(s^2 + 2s + 5)(s+2)}$$

$$f_1(t) = \left[e^{-t} \cos 2t - e^{-t} \sin 2t + 3e^{-2t} \right] u(t) \quad \text{جواب:}$$

۶-۸- کاربردهای اولیه از تبدیل لاپلاس

در این بخش، برآنیم تا کاربردهای اولیه‌ای از تبدیل لاپلاس را بیان نماییم. در فصل‌های آینده، کاربردهای اساسی دیگری از تبدیل لاپلاس را ارائه می‌کنیم.

۶-۱- مدار معادل سلف و خازن در حوزه فرکانس

برای یک سلف با اندوکتانس L و جریان اولیه (o^-) ، رابطه زیر، بین ولتاژ با جریان آن در حوزه زمان برقرار است:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(t) dt + i_L(o^-)$$

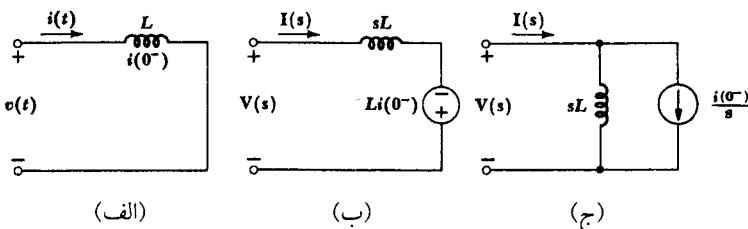
حال اگر این رابطه را به حوزه فرکانس انتقال نماییم (تبدیل لاپلاس بگیریم)، خواهیم داشت:

$$V_L(s) = sL \cdot I(s) - Li(o^-) \quad (۴۵-۸)$$

و یا،

$$I(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i(o^-)}{s} \quad (۴۶-۸)$$

رابطه (۴۵-۸) به هنگام کاربرد قانون KCL و رابطه (۴۶-۸) به هنگام کاربرد قانون KVL اضافه می‌باشد. شکل (۸-۸) مدل یک سلف را در حوزه زمان و فرکانس نشان می‌دهد.



شکل (۸-۸): مدل یک سلف القایی در: (الف) حوزه زمان؛ ب و (ج) حوزه فرکانس

همین موضع را می‌توان برای یک خازن با ظرفیت خازنی C و ولتاژ اولیه (o^-) ارائه داد. رابطه ولتاژ-جریان هر خازن در حوزه زمان برابر است با:

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} , \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{\infty}^t i_C(t) dt + v_C(o^-)$$

حال با انتقال رابطه اخیر به حوزه فرکانس می‌توان نوشت:

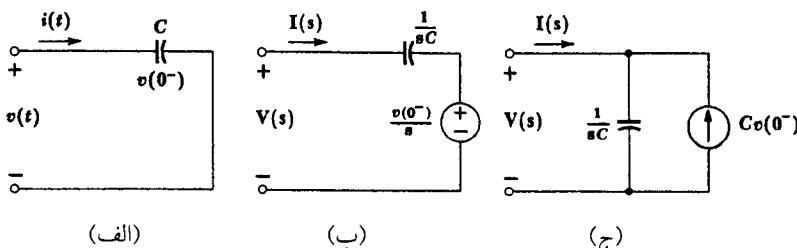
$$I(s) = CsV(s) - Cv(o^-) \quad (47-8)$$

و یا،

$$V(s) = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{v(o^-)}{s} \quad (48-8)$$

دو معادله (۴۷-۸) و (۴۸-۸) بترتیب برای کاربرد در قوانین KVL و KCL مورد استفاده قرار می‌گیرد. در شکل (۹-۸) مدل یک خازن در حوزه زمان و فرکانس آورده شده است. همچنین از روابط (۴۵-۸) و (۴۸-۸) در می‌یابیم که اگر ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف، برابر صفر باشند آنگاه امپدانس سلف و خازن در حوزه فرکانس به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} Z_L(s) &= sL \\ Z_C(s) &= \frac{1}{sC} \end{aligned} \quad (49-8)$$



شکل (۹-۸): مدل یک خازن در: (الف) حوزه زمان؛ ب و ج) حوزه فرکانس

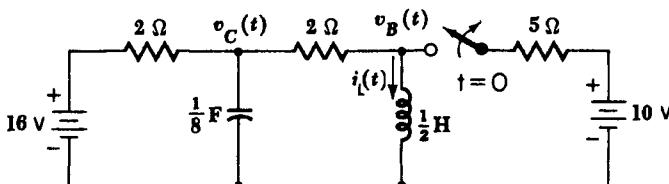
۲-۶-۸- پاسخ حالت کامل مدارهای الکتریکی

حل مسائل مدارهای الکتریکی به روش تبدیل لاپلاس، در واقع، تبدیل حوزه زمان به حوزه فرکانس را انجام می‌دهد. در این روش، معادلات دیفرانسیل در حوزه زمان به معادلات جبری ساده تبدیل می‌شوند که بالطبع، حل آنان بسیار ساده‌تر خواهد بود. بعلاوه، روش تبدیل لاپلاس نسبت به روش حوزه زمانی، دارای دو مزیت دیگر است: اول آنکه در روش تبدیل لاپلاس، پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر به صورت یک جا و در عین حال، متمایز به دست می‌آیند. دوم آنکه در روش تبدیل لاپلاس، شرایط اولیه در حل

مسئله به طور مستقیم وارد می‌شود. لذا در این روش، مشتق‌های مرتبه بالا در حل مسئله وجود ندارد.

در حل مدارهای الکتریکی خطی با استفاده از تبدیل لابلس، دو روش جداگانه وجود دارد. در روش اول، معادلات دیفرانسیل مدار نوشته شده و سپس تک تک جملات را با استفاده از تبدیل لابلس به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم. در این روش، به طور خودکار، جملاتی به وجود می‌آید که شرایط اولیه مدار در آنها وجود دارد. در این حالت، پس از جایگزینی شرایط اولیه، خروجی تبدیل شده بر حسب متغیر s به دست می‌آید و سپس با تبدیل معکوس، پاسخ در حوزه زمان تعیین می‌شود. در روش دوم با استفاده از روش ارائه شده در بخش (۱۰-۸)، مدار معادل سلف و خازن در حوزه فرکانس در مدار جایگزین می‌شوند و سپس معادلات مدار را براساس قوانین KCL یا KVL می‌نویسیم. در این روش، چون در مدار معادل سلف و خازن، شرایط اولیه وارد می‌شود، لذا می‌توان به راحتی مسئله را با وجود شرایط اولیه سلف‌ها و خازن‌ها حل نمود.

مثال (۱۰-۸): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۰-۸) فرض می‌شود که در لحظه $t=0$ ، کلید مدار، باز می‌شود. ولتاژ دو سر خازن (t) را برای $t \geq 0$ بباید.



شکل (۱۰-۸): مدار الکتریکی مورد نظر برای مثال (۱۰-۸)

حل: این مدار را از دو روش موردنظر حل می‌کنیم.

روش اول: ابتدا براساس روش KCL، پس از باز شدن کلید مدار، معادلات در حوزه زمان را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[v_C(t) - 16] + \frac{1}{8} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{2}[v_C(t) - v_B(t)] = 0 \\ \frac{1}{2}[v_B(t) - v_C(t)] + 2 \int v_B(t) dt = 0 \end{cases}$$

حال دو معادله اخیر را به حوزه فرکانس منتقل می‌کنیم. لذا با استفاده از خواص تبدیل لابلس داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}V_C(s) - \frac{16}{s} + \frac{1}{8}[sV_C(s) - v_C(o^-)] + \frac{1}{4}[V_C(s) - V_B(s)] = o \\ \frac{1}{2}[V_B(s) - V_C(s)] + \frac{V_B(s)}{s} + \frac{i_L(o^-)}{s} = o \end{cases}$$

برای به دست آوردن شرایط اولیه سلف و خازن در مدار شکل (۱۰-۸) می‌دانیم که پس از گذشت زمان طولانی، سلف به صورت اتصال کوتاه و خازن به صورت مدار باز در می‌آید. لذا،

$$i_L(o^+) = i_L(o^-) = \frac{16}{4} + \frac{1}{5} = 6A$$

$$v_C(o^+) = v_C(o^-) = \frac{16}{4} \times 2 = 8V$$

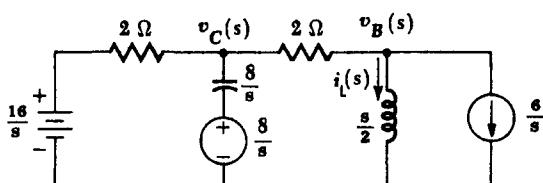
همچنین با جایگزینی مقادیر $i_L(o^-)$ و $v_C(o^-)$ و حذف $V_B(s)$ از دسته معادلات فوق خواهیم داشت:

$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{8}(s^2 + 8s + 32)}{s(s^2 + 8s + 32)}$$

اکنون با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس می‌توان نوشت:

$$v_C(t) = \mathcal{E}^{-1}[V_C(s)] = 8 - 4e^{-4t} \sin 4t \quad t > 0$$

روش دوم: در این روش، ابتدا مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۰-۸) را در حوزه فرکانس رسم می‌کنیم که این مدار در شکل (۱۱-۸) رسم شده است.



شکل (۱۱-۸): مدار الکتریکی شکل (۱۰-۸) در حوزه فرکانس (پس از باز شدن کلید)

حال معادلات KCL را برای دو گره مدار شکل (۱۱-۸) می‌نویسیم که خواهیم داشت:

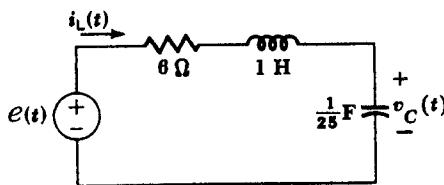
$$\begin{cases} \frac{1}{4}\left[V_C(s) - \frac{16}{s}\right] + \frac{s}{8}\left[V_C(s) - \frac{1}{s}\right] + \frac{1}{4}[V_C(s) - V_B(s)] = o \\ \frac{V_B(s)}{s} + \frac{6}{s} + \frac{1}{2}[V_B(s) - V_C(s)] = o \end{cases}$$

در نتیجه با حذف متغیر $V_B(s)$ ، متغیر $V_C(s)$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$V_C(s) = \frac{\Lambda(s^2 + 6s + 32)}{s(s^2 + 8s + 32)}$$

که مشابه معادلات در روش اول است.

مثال (۱۸-۸): در مدار شکل (۱۲-۸) با فرض $v_c(o^-) = 1V$ و $i_L(o^-) = 5A$ و ورودی $e(t) = 12\sin 5t$ ، جریان $i_L(t)$ را بیابید.



شکل (۱۲-۸): مدار الکتریکی مربوط به مثال (۱۸-۸)

حل: معادله دیفرانسیل مدار مورد نظر به صورت زیر به دست می آید:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + \frac{1}{C} \int_{o^-}^t i(t) dt + v_c(o^-) = e(t)$$

حال اگر از رابطه اخیر، تبدیل لاپلاس گرفته و مقادیر ارائه شده در مثال را جایگزین کنیم داریم:

$$\begin{aligned} \frac{L}{s}(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})I(s) &= E(s) + L i_L(o^-) - \frac{v_c(o^-)}{s} \\ I(s) &= \frac{s}{(s+3)^2 + 4^2} E(s) + \frac{5s-1}{(s+3)^2 + 4^2} \end{aligned}$$

که جمله اول در سمت راست معادله اخیر، تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر، و جمله دوم، بیانگر تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر است. حال با توجه به آنکه،

$$E(s) = \mathcal{F}[12\sin 5t] = \frac{60}{s^2 + 5^2}$$

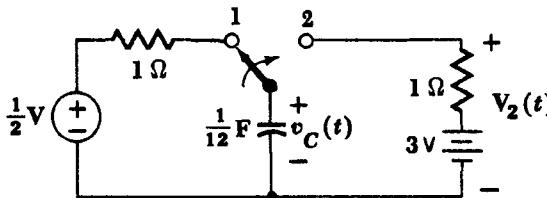
است، لذا خواهیم داشت:

$$I(s) = \frac{s}{[(s+3)^2 + 4^2].(s^2 + 5^2)} + \frac{5s-1}{(s+3)^2 + 4^2}$$

اکنون با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس برای رابطه اخیر می توان نوشت:

$$i(t) = 5e^{-3t} \cos 4t - 6/5 e^{-3t} \sin 4t + 12 \sin 5t \quad t \geq 0$$

تمرین (۶-۸): در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۳-۸) فرض می‌شود که کلید مدار به مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده است و به طور ناگهانی و در زمان $t = 0$ در وضعیت ۲ قرار می‌گیرد. ولتاژ $v_0(t)$ را برای زمان $t \geq 0$ محاسبه نمایید.



شکل (۱۳-۸): مدار مربوط به مثال (۶-۸)

$$\text{جواب: } v_c(0^+) = \frac{1}{2} V, \quad v_0(t) = 3 - \frac{5}{2} e^{-12t}$$

۷-۸- خلاصه و نتیجه‌گیری

هدف از ارائه این فصل آن بود که با بیان روش تبدیل لاپلاس و مشخص نمودن خصوصیات کاربردی آن، ابزار مفیدی برای حل مدارهای الکتریکی در اختیار خوانندگان گذاشته شود. خلاصه این مطالب را می‌توان به صورت زیر اشاره نمود:

- خواص اساسی تبدیل لاپلاس و ارائه تبدیل لاپلاس بعضی توابع زمانی مهم در جداول (۱-۸) و (۲-۸) ارائه شده است. با استفاده از روابط مشخص شده در جداول، می‌توان توابع زمانی پیچیده‌ای را به حوزه فرکانس منتقل نموده و یا بالعکس، تبدیل لاپلاس معکوس انجام داد.
- با استفاده از ابزار تبدیل لاپلاس، به راحتی می‌توان پاسخ حالت صفر، پاسخ ورودی صفر و پاسخ کامل یک مدار الکتریکی را به طور مستقیم محاسبه نمود. البته در محاسبه پاسخ کامل یک مدار، روند حل مسئله با استفاده از تبدیل لاپلاس به گونه‌ای است که مستقیماً می‌توان به این پاسخ دسترسی پیدا کرد. به عبارت دیگر، در یک حل مستقیم، پاسخ حالت صفر و ورودی صفر بطور یکجا محاسبه می‌شود.
- به منظور تعیین تابع زمانی یک تابع در حوزه فرکانس، می‌توان از روش تجزیه به کسرهای جزیی استفاده نمود که حالت‌های مختلف آن در بخش (۵-۸) آورده شده است.
- یکی از کاربردهای اساسی تبدیل لاپلاس، مدل سازی سلف و خازن در حوزه فرکانس و حل مدارهای الکتریکی است که به طور ابتدایی و مقدماتی، این مبحث در بخش (۶-۸)

آورده شده است. در فصل‌های آتی، کاربردهای مفصل‌تری از تبدیل لپلاس آورده شده است.

۸-۸-۸- مسائل مروری

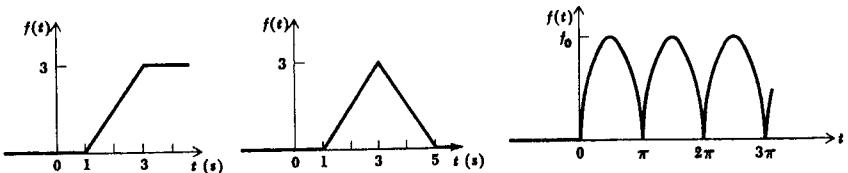
- تبدیل لپلاس توابع زمانی زیر را بیابید.

$$f(t) = 2e^{\sin t} \delta(t) \quad f(t) = 5u(t-5)$$

$$f(t) = \sin^3 4t \cdot u(t) \quad f(t) = t \cdot u(t-2)$$

$$f(t) = t^3 2e^{-2t} u(t)$$

- تبدیل لپلاس توابع نشان داده در شکل (۱۴-۸) را بیابید.



شکل (۱۴-۸): توابع زمانی مربوط به سؤال (۲)

- تبدیل لپلاس معکوس توابع زیر را بیابید:

$$F(s) = \frac{1 \cdot s^4}{s^4 + 5s + 4}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^2(s+3)}$$

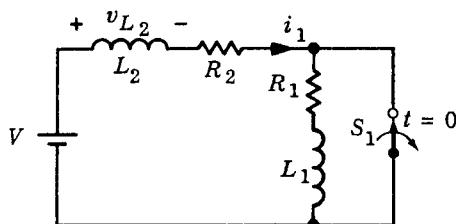
$$F(s) = \frac{3s^3 + 2s^2 + s + 1}{(s^2 + 2s + 2)^2}$$

$$F(s) = \frac{e^{-3s-3}}{s+1}$$

$$F(s) = \frac{s^4 + 1}{(s+1)^4}$$

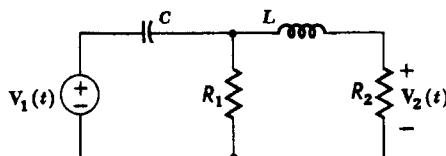
- با توجه به آنکه $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ و $\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ می‌باشد، آنگاه تبدیل لپلاس توابع $\cosh at$ و $\sinh at$ را بیابید.

- مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۵-۸) مفروض است. فرض کنید که کلید ۱ به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ ، کلید باز می‌شود. حال اگر $V=2V$ ، $R_1=R_2=1\Omega$ ، $L_1=L_2=1H$ را با استفاده از روش تبدیل لپلاس بیابید.



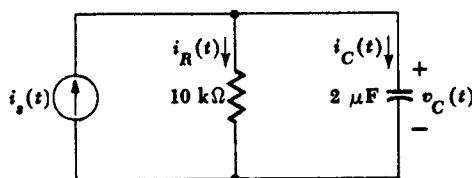
شکل (۱۵-۸): مدار مربوط به سؤال (۵)

- در مدار ارائه شده در شکل (۱۶-۸) پاسخ ورودی پله را برای $v_2(t)$ در حالتی که $C = 1\text{F}$ و $L = 1\text{H}$ باشد، بیابید.



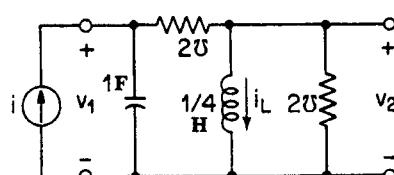
شکل (۱۶-۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

- در مدار ارائه شده در شکل (۱۷-۸) پاسخ ورودی ضریب واحد را برای $i_R(t)$ و $v_C(t)$ بیابید.



شکل (۱۷-۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۱۸-۸)، در صورتی که ورودی $i(t)$ به مقدار $i = 2e^{-t}u(t)$ آمپر باشد، آنگاه با استفاده از تبدیل لاپلاس، ولتاژ $v_2(t)$ را بیابید. فرض کنید که تمام شرایط اولیه، صفر است.

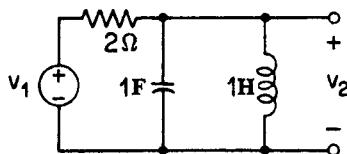


شکل (۱۸-۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

۹- در مدار ارائه در شکل (۱۹-۸)، در صورتی که ورودی $v_1(t)$ در حالت‌های مختلف زیر باشد، مقدار $v_2(t)$ را بباید. فرض کنید که شرایط اولیه مدار به مقدار صفر است.

$$\text{الف) } v_1(t) = \sin t \cdot u(t)$$

$$\text{ب) } v_1(t) = \sin 2t \cdot u(t)$$



شکل (۱۹-۸): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

۱۰- سؤال (۹) را با وجود شرایط اولیه $v_C(o^-) = 1V$ و $i_L(o^-) = 2A$ دوباره حل کنید.